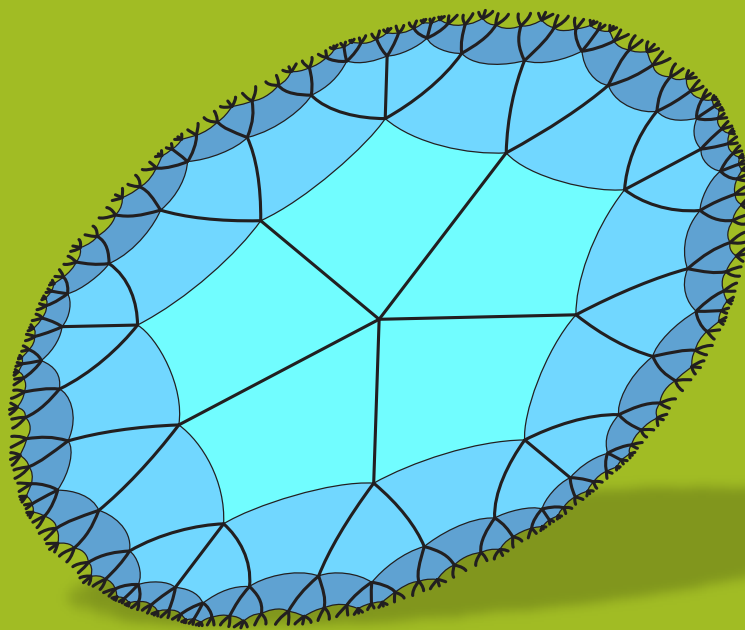


# Dimenziók

**Matematikai Közlemények**

**VII. kötet**



**SOE EMK Matematikai Intézet  
Soproni Tudós Társaság  
2019**

# **Dimenziók**

**Matematikai Közlemények**

**VII. kötet**

**SOE EMK Matematikai Intézet**

**Soproni Tudós Társaság**

**2019**

Szerkesztők:

Dr. Németh László  
egyetemi docens

Dr. Szalay László  
intézetigazgató egyetemi tanár

Nagy Zsolt  
címzetes egyetemi docens

Soproni Egyetem  
Erdőmérnöki Kar  
Matematikai Intézet  
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.



MTA VEAB Soproni Tudós Társaság  
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.



Kiadja: SOE EMK Matematikai Intézet és Soproni Tudós Társaság

HU ISSN 2064-2172

## **Tartalomjegyzék**

On Papkovich-Neuber type representations for solutions of the Navier-Lamé equation in spatial star-shaped domains .....	3
Közelítő szögharmadolás szerkesztése GeoGebrával .....	9
Az általánosított októnióalgebrák egy új felépítéséről.....	19
Forgólézeres szintezőműszer kalibrálása .....	29
Kettős Gauss függvény alkalmazása.....	37
Elsőrendű differenciálegyenletes modellek .....	49
PMSB és alkalmazása .....	59



## On Papkovich-Neuber type representations for solutions of the Navier-Lamé equation in spatial star-shaped domains

Sándor Zsuppán

Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium és Kollégium  
zsuppans@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Papkovich-Neuber típusú reprezentációs képletet vezetünk le a lineáris rugalmasságtan Navier-Lamé egyenletének megoldásaira térbeli csillagszerű tartományban. A kapott eredményt összehasonlítjuk a már létező hasonló eredményekkel.

ABSTRACT. We develop a Papkovich-Neuber type representation formula for the solutions of the Navier-Lamé equation of linear elastostatics for spatial star-shaped domains. This representation is compared to the existing ones.

### 1. Introduction

Papkovich-Neuber type formulae represent the solutions of the Navier-Lamé equation of linear elastostatics via auxiliary harmonic potentials. This technique is also suitable for generating solutions of the Stokes equations for the creeping flow of an incompressible fluid. It originates in the papers of Papkovich [6] and Neuber [4]. An important variant of this representation was given by Kratz [2] for the Stokes equation, where the uniqueness of the harmonic potentials in the representation was also proved. The Kratz representation [2] is valid for general planar domains, but in the spatial case only for star-shaped ones. Another variant of it can be found in [3] also for spatial star-shaped domains. In [8] the present author proved that the representation formulae in [2] and [3] are equivalent, moreover, generalized them for the Navier-Lamé equation of linear elastostatics. The representation formulae derived in [2] and [8] solve the problem of eliminating the scalar harmonic potential from the general Papkovich-Neuber representation in the special case of spatial star-shaped domains maintaining simultaneously the completeness of the representation, see [5] and also the references given there. Although these formulae are meant to derive analytic solutions of the respective equations, they can also be utilized in numerical methods, see for example [1].

In this paper we derive another representation similar to that in [8], Theorem 5.3 for a modified Stokes type equation also equivalent to the Navier-Lamé system. The connection of this representation to existing ones is also investigated.

### 2. Main result

In this paper we develop representation formulae for the solutions  $u \in C^2(\Omega)$  and  $q \in C^1(\Omega)$  of the equation

$$-\Delta u = \operatorname{rot} q \text{ and } \operatorname{rot} u = \tilde{v}q, \quad (1)$$

where  $\Omega$  is a spatial star-shaped domain with respect to the origin. (1) is similar to the system

$$-\Delta u = \operatorname{grad} p \text{ and } -\operatorname{div} u = vp, \quad (2)$$

which was (although not in this form) considered in [8]. Note that both (1) and (2) are equivalent to the Navier-Lamé equation

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u = 0 \quad (3)$$

in linear elastostatics, where  $\lambda$  and  $\mu$  are the Lamé constants. These constants satisfy usually  $\mu > 0$  and  $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ , where the latter quantity is the compression modulus. In order to establish the connection of (3) to (1) and (2) we have to set  $q = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \operatorname{rot} u$  and  $p = \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div} u$ , respectively. We also have  $v = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}$  in (2) and  $\tilde{v} = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} = 1 - v$  in (1).

**Theorem 1.** Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  be a star-shaped domain with respect to the origin, and set  $\tilde{v} \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{v} > 0$ ,  $\tilde{v} \neq \frac{1}{4}, 1$ . The functions  $u \in C^2(\Omega)$  and  $q \in C^1(\Omega)$  satisfy (1) if and only if there exists a harmonic function  $\tilde{h} \in C^2(\Omega)$  such that

$$u(x) = \frac{1}{2} \nabla (x \cdot \tilde{h}(x)) + \frac{1}{2} \operatorname{rot} (x \times \tilde{h}(x)) + (1 - 2\tilde{v})\tilde{h}(x), \quad (4)$$

$$q(x) = -2 \operatorname{rot} \tilde{h}(x) - 4 \nabla \phi(x) \quad (5)$$

for  $x \in \Omega$ . The harmonic function  $\tilde{h}$  is unique and we have

$$\tilde{h}(x) = \frac{2}{1-4\tilde{v}} \left( u(x) + \frac{1}{4} x \times q(x) - \frac{1}{4(1-\tilde{v})} x \operatorname{div} u(x) + x \times \nabla \phi(x) \right), \quad (6)$$

where the function  $\phi$  is harmonic in  $\Omega$  and defined by

$$\phi(x) = -\frac{1}{4} \int_0^1 t^{4\tilde{v}} x \cdot q(tx) dt. \quad (7)$$

**PROOF.** We need the following identities, where we assume the existence and continuity of the involved scalar and vector valued functions. These are the same identities used in [2] and [8].

$$x \operatorname{div} u + x \times \operatorname{rot} u = u + \nabla(x \cdot u) + \operatorname{rot}(x \times u), \quad (8)$$

$$-\Delta u = -\nabla \operatorname{div} u + \operatorname{rot} \operatorname{rot} u, \quad (9)$$

$$\operatorname{div}(x \times u) = -x \cdot \operatorname{rot} u, \quad (10)$$

$$\operatorname{div}(\phi x) = 3\phi + x \cdot \nabla \phi, \quad (11)$$

$$\operatorname{rot}(\phi x) = -x \times \nabla \phi, \quad (12)$$

$$\operatorname{rot}(x \times \nabla \phi) = -\nabla(\phi + x \cdot \nabla \phi) + x \Delta \phi, \quad (13)$$

$$\nabla(r^2 \phi) = 2\phi x + r^2 \nabla \phi, \text{ for } r = |x|, \quad (14)$$

$$\Delta(x \cdot u) = x \cdot \Delta u + 2 \operatorname{div} u, \quad (15)$$

$$\Delta(x \times u) = x \times \Delta u + 2 \operatorname{rot} u, \quad (16)$$

$$\Delta(\phi x) = x \Delta \phi + 2 \nabla \phi, \quad (17)$$

$$\Delta(x \times \nabla \phi) = x \times \nabla \Delta \phi. \quad (18)$$

From the expression (7) of  $\phi$  we obtain setting  $k(x) = x \cdot q(x)$  with integration by parts that

$$\begin{aligned} x \cdot \nabla \phi(x) &= -\frac{1}{4} \int_0^1 t^{4\tilde{v}} x \cdot (\nabla k)(tx) dt = -\frac{1}{4} \int_0^1 t^{4\tilde{v}} \frac{d}{dt} (k(tx)) dt \\ &= -\frac{1}{4} [t^{4\tilde{v}} k(tx)]_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^1 4\tilde{v} t^{4\tilde{v}-1} k(tx) dt = -\frac{1}{4} x \cdot q(x) - 4\tilde{v} \phi(x). \end{aligned}$$

Hence, the function  $\phi$  defined by (7) satisfies the equation

$$4\tilde{v} \phi(x) + x \cdot \nabla \phi(x) + \frac{1}{4} x \cdot q(x) = 0. \quad (19)$$

Taking the divergence of the second equation of (1) gives  $\operatorname{div} q = 0$  in a view of  $\tilde{v} > 0$ . Moreover, by (1) and (9) we have  $\Delta q = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} q = \operatorname{rot} \Delta u = \Delta \operatorname{rot} u = \tilde{v} \Delta q$ , which means  $\Delta q = 0$  using  $\tilde{v} \neq 1$ . This implies by (15) that  $\Delta k = x \cdot \Delta q + 2 \operatorname{div} q = 0$  and

$$\Delta \phi(x) = -\frac{1}{4} \int_0^1 t^{4\tilde{v}+2} (\Delta k)(tx) dt = 0.$$

That is, the function  $\phi$  is harmonic. Note also, that  $\tilde{v} > 0$  is sufficient for the integral in (7) to be well defined.

First assume, that  $u$  and  $q$  are given by (4) and (5) with harmonic  $\tilde{h}$  and  $\phi$ . Using the identities (9), (15) and (16) along with (19) there follows

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -\frac{1}{2} \nabla (x \cdot \Delta \tilde{h} + 2 \operatorname{div} \tilde{h}) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} (x \times \Delta \tilde{h} + 2 \operatorname{rot} \tilde{h}) - (1 - 2\tilde{v}) \Delta \tilde{h} \\ &= -\nabla \operatorname{div} \tilde{h} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{h} = -2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{h} = \operatorname{rot} q, \\ \operatorname{rot} u &= \frac{1}{2} (\nabla \operatorname{div} (x \times \tilde{h}) - \Delta (x \times \tilde{h})) + (1 - 2\tilde{v}) \operatorname{rot} \tilde{h} \\ &= -2\tilde{v} \operatorname{rot} \tilde{h} + \frac{1}{4} \nabla (x \cdot (-2 \operatorname{rot} \tilde{h})) = \tilde{v} (q + 4 \nabla \phi) + \frac{1}{4} \nabla (x \cdot (q + 4 \nabla \phi)) \\ &= \tilde{v} q + \nabla \left( 4\tilde{v} \phi(x) + x \cdot \nabla \phi(x) + \frac{1}{4} x \cdot q(x) \right) = \tilde{v} q. \end{aligned}$$

Hence  $u$  and  $q$  satisfy (1).

In the opposite direction, we assume that  $u$  and  $q$  satisfy (1). For the calculation we use repeatedly

$$\nabla \operatorname{div} u = \Delta u + \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = -\operatorname{rot} q + \operatorname{rot} \tilde{v} q = -(1 - \tilde{v}) \operatorname{rot} q$$

as a consequence of (1). By  $\Delta \phi = 0$  and (16) we have  $\Delta(x \times \nabla \phi) = 0$  and

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{h} &= \frac{2}{1 - 4\tilde{v}} \left( \Delta u + \frac{1}{4} \Delta (x \times q) - \frac{1}{4(1 - \tilde{v})} \Delta (x \operatorname{div} u) + \Delta (x \times \nabla \phi) \right) \\ &= \frac{2}{1 - 4\tilde{v}} \left( -\operatorname{rot} q + \frac{1}{4} (x \times \Delta q + 2 \operatorname{rot} q) - \frac{1}{4(1 - \tilde{v})} (x \Delta \operatorname{div} u + 2 \nabla \operatorname{div} u) \right) \\ &= \frac{2}{1 - 4\tilde{v}} \left( -\operatorname{rot} q + \frac{1}{2} \operatorname{rot} q - \frac{1}{4(1 - \tilde{v})} (x \operatorname{div} \operatorname{rot} q - 2(1 - \tilde{v}) \operatorname{rot} q) \right) = 0, \end{aligned}$$



that is, the function  $\tilde{h}$  defined by (6) is harmonic. We calculate by (8), (12), (13) and (19) that

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \tilde{h} &= \frac{2}{1-4\tilde{v}} \left( \tilde{v}q + \frac{1}{4}(x \operatorname{div} q + x \times \operatorname{rot} q - q - \nabla(x \cdot q)) + \frac{1}{4(1-\tilde{v})} x \times \nabla \operatorname{div} u \right. \\ &\quad \left. + (-\nabla(\phi + x \cdot \nabla \phi) + x \Delta \phi) \right) \\ &= \frac{2}{1-4\tilde{v}} \left( \tilde{v}q + \frac{1}{4}x \times \operatorname{rot} q - \frac{1}{4}q - \frac{1}{4}\nabla(x \cdot q) - \frac{1}{4(1-\tilde{v})}x \times (1-\tilde{v}) \operatorname{rot} q \right. \\ &\quad \left. - \nabla(\phi + x \cdot \nabla \phi) \right) = \frac{2}{1-4\tilde{v}} \left( \frac{4\tilde{v}-1}{4}q - \nabla \left( \phi + x \cdot \nabla \phi + \frac{1}{4}x \cdot q \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2}q - 2\nabla \phi. \end{aligned}$$

From this we obtain (5) by rearrangeing. We also calculate by (10) and (11) that

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{h} &= \frac{2}{1-4\tilde{v}} \left( \operatorname{div} u - \frac{1}{4}x \cdot \operatorname{rot} q - \frac{1}{4(1-\tilde{v})}(3 \operatorname{div} u + x \cdot \nabla \operatorname{div} u) \right) \\ &= \frac{2}{1-4\tilde{v}} \left( \frac{1-4\tilde{v}}{4(1-\tilde{v})} \operatorname{div} u - \frac{1}{4}x \cdot \operatorname{rot} q - \frac{1}{4(1-\tilde{v})}x \cdot \nabla(-(1-\tilde{v}) \operatorname{rot} q) \right) \\ &= \frac{1}{2(1-\tilde{v})} \operatorname{div} u. \end{aligned}$$

We compose the expressions for  $\operatorname{rot} \tilde{h}$  and  $\operatorname{div} \tilde{h}$  as

$$\frac{1}{2}(x \operatorname{div} \tilde{h} + x \times \operatorname{rot} \tilde{h}) = \frac{1}{4(1-\tilde{v})}x \operatorname{div} u - \frac{1}{4}x \times q - x \times \nabla \phi.$$

On the other hand we have by (6) that

$$\left( \frac{1}{2} - 2\tilde{v} \right) \tilde{h} = u + \frac{1}{4}x \times q - \frac{1}{4(1-\tilde{v})}x \operatorname{div} u + x \times \nabla \phi.$$

Adding the latter two expressions and using (8) there follows

$$\frac{1}{2}\nabla(x \cdot \tilde{h}) + \frac{1}{2}\operatorname{rot}(x \times \tilde{h}) + (1-2\tilde{v})\tilde{h} = \frac{1}{2}(x \operatorname{div} \tilde{h} + x \times \operatorname{rot} \tilde{h}) + \left( \frac{1}{2} - 2\tilde{v} \right) \tilde{h} = u,$$

that is, we have obtained (4) as intended.

Finally we prove the uniqueness of the harmonic function  $\tilde{h}$  in the representation (4). Assume that the expression (4) for  $u$  is valid for two harmonic functions  $\tilde{h}_1$  and  $\tilde{h}_2$ . Subtracting these two expressions and setting  $\tilde{h} = \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2$  gives

$$\frac{1}{2}\nabla(x \cdot \tilde{h}) + \frac{1}{2}\operatorname{rot}(x \times \tilde{h}) + (1-2\tilde{v})\tilde{h} = 0 \quad (20)$$

for the harmonic function  $\tilde{h}$ . Taking first the divergence and then the rotation of (20) gives

$$0 = \frac{1}{2}\Delta(x \cdot \tilde{h}) + (1-2\tilde{v})\operatorname{div} \tilde{h} = 2(1-\tilde{v})\operatorname{div} \tilde{h}$$

and

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\operatorname{rot} \operatorname{rot}(x \times \tilde{h}) + (1-2\tilde{v})\operatorname{rot} \tilde{h} = \frac{1}{2}\nabla \operatorname{div}(x \times \tilde{h}) - \frac{1}{2}\Delta(x \times \tilde{h}) + (1-2\tilde{v})\operatorname{rot} \tilde{h} \\ &= -\frac{1}{2}\nabla(x \cdot \operatorname{rot} \tilde{h}) - \operatorname{rot} \tilde{h} + (1-2\tilde{v})\operatorname{rot} \tilde{h} = -\frac{1}{2}\left(4\tilde{v}\operatorname{rot} \tilde{h} + \nabla(x \cdot \operatorname{rot} \tilde{h})\right). \end{aligned}$$

The first equation implies  $\operatorname{div} \tilde{h} = 0$  by  $\tilde{v} \neq 1$ , while from the second equation we obtain

$$4\tilde{v}x \cdot \operatorname{rot} \tilde{h} + x \cdot \nabla(x \cdot \operatorname{rot} \tilde{h}) = 0.$$

This equation is very similar to (19). Its solution is  $x \cdot \operatorname{rot} \tilde{h} = 0$ , which we substitute into the second of the latter equations. There follows

$$\tilde{v} \operatorname{rot} \tilde{h} = 0,$$

which implies  $\operatorname{rot} \tilde{h} = 0$  by  $\tilde{v} > 0$ . Comparing (8) and (20) gives

$$-\frac{1}{2}(-\tilde{h} + x \operatorname{div} \tilde{h} + x \times \operatorname{rot} \tilde{h}) + (1 - 2\tilde{v})\tilde{h} = \left(\frac{1}{2} - 2\tilde{v}\right)\tilde{h},$$

which on the other hand implies  $\tilde{h} = 0$  by  $\tilde{v} \neq \frac{1}{4}$ . Hence we have uniqueness for the harmonic function  $\tilde{h}$  in the representation formula (4). ■

**Remark 1.** The Lamé constants usually satisfy  $\mu > 0$  and  $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ , which mean  $\frac{\lambda}{\mu} > -\frac{2}{3}$ . This implies  $1 < \tilde{v} < 4$  for the parameter  $\tilde{v} = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$  in Theorem 1. Hence, the assumptions for the parameter  $\tilde{v}$  in Theorem 1 are satisfied for every pair of Lamé constants.

**Remark 2.** An analogous representation for the solutions of (2) in [8] is

$$u(x) = -\frac{1}{2}\nabla(x \cdot h(x)) - \frac{1}{2}\operatorname{rot}(x \times h(x)) + (1 - 2\nu)h(x), \quad (21)$$

$$p(x) = 2 \operatorname{div} h(x), \quad (22)$$

where the unique harmonic function  $h$  is defined by

$$h(x) = \frac{2}{3-4\nu} \left( u(x) + \frac{1}{4}p(x)x - \frac{1}{4(1-\nu)}x \times \operatorname{rot} u(x) + x \times \nabla\psi(x) \right) \quad (23)$$

with  $\psi(x) = -\frac{1}{4(1-\nu)} \int_0^1 t^{4(1-\nu)} x \cdot \operatorname{rot} u(tx) dt$ . If we compare this definition of  $\psi$  to (7) and we also take into account  $\tilde{v} = 1 - \nu$  and the second equation in (1), then we can conclude that in fact  $\psi = \phi$ . Moreover, comparing this with (1), (2), (6) and (23) gives

$$h(x) = -\tilde{h}(x) + \frac{1}{1-4\tilde{v}}x \times q(x).$$

Hence the representation for solutions of (1) is in fact the same as the representation in [8], Theorem 5.3 for solutions of (2).

**Remark 3.** Theorem 1 of this paper (along with the related Theorem 5.3 in [8]) solves the problem of eliminating the scalar harmonic potential from the general Papkovitch-Neuber representation for the solution of the Navier-Lamé equations in spatial star-shaped domains. Decisive in this regard is the solvability of equation (19) for star-shaped domains by the harmonic function (7). For the elimination of the scalar Papkovitch-Neuber potential a very similar equation is considered in [5], Section 3, see equation (3.1) in [5].

**Remark 4.** If we impose a homogeneous Dirichlet boundary condition on the function  $u$  in (1) and (2), then we can interpret these as eigenvalue problems for the Schur complement operators

$$\mathcal{S}_{\text{div}} = -\operatorname{div}(-\Delta^{-1})\nabla \quad \text{and} \quad \mathcal{S}_{\text{rot}} = \operatorname{rot}(-\Delta^{-1})\operatorname{rot}$$

connected to the Stokes problem on a spatial star-shaped domain. They were studied for example in [7], see also the references given there.

## References

- [1] **Hou L.S.** and **Manouzi H.**, A div-curl formulation of the Stokes boundary value problem based on a harmonic representation formula, *Appl. Math. Lett.* Vol. 6, No. 6 (1993), 23-27. doi.org/10.1016/0893-9659(93)90072-U
- [2] **Kratz W.**, On the representation of Stokes flows, *SIAM J. Math. Anal.* 22(2), (1991), 414-423. doi.org/10.1137/0522027
- [3] **Kratz W.** and **Lindae A.**, A representation formula for three-dimensional Stokes flows, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 11(1992)3, 371-375. doi.org/10.4171/ZAA/600
- [4] **Neuber H.**, Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 14(4), (1934), 203-212. doi.org/10.1002/zamm.19340140404
- [5] **Millar R.F.**, On the completeness of the Papkovitch potentials, *Quarterly of Applied Mathematics* 41(4) (January 1984), 385-393. <https://www.jstor.org/stable/43637214>
- [6] **Papkovitch P.F.**, Solution Générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité exprimée par trois fonctions harmoniques, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* 195(1932), 513-515. [https://fr.wikisource.org/w/index.php?title=Fichier%3AComptes\\_rendus\\_hebdomadaires\\_des\\_s%C3%A9ances\\_de\\_l'E2%80%99Acad%C3%A9mie\\_des\\_sciences%2C\\_tome\\_195%2C\\_1932.djvu&page=513](https://fr.wikisource.org/w/index.php?title=Fichier%3AComptes_rendus_hebdomadaires_des_s%C3%A9ances_de_l'E2%80%99Acad%C3%A9mie_des_sciences%2C_tome_195%2C_1932.djvu&page=513)
- [7] **Velte W.**, On inequalities of Friedrichs and Babuška-Aziz in dimension three, *Journal of Analysis and its Applications* 17(4), (1998), 843-857. doi.org/10.4171/ZAA/854
- [8] **Zsuppán S.**, On representations of Stokes flows and of the solutions of Navier's equation for linear elasticity, *Analysis* 28(2), (2008), 219-237. doi.org/10.1524/anly.2008.0910

## Közelítő szögharmadolás szerkesztése GeoGebrával

**Talata István**

Szent István Egyetem,  
Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest,  
és Dunaújvárosi Egyetem, Dunaújváros  
talata.istvan@ybl.szie.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Ismert, hogy körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető meg egy tetszőleges szög harmada, de a szögharmadhoz tetszőleges pontossággal lehet közelítő szöget szerkeszteni. Azt vizsgáljuk, hogy melyik szerkesztési eljárással érdemes sok tizedesjegynyi pontosságú közelítő szögharmadolási szerkesztést elvégezni úgy, hogy viszonylag kevés szerkesztési lépésre legyen ehhez szükségünk. Azzal is foglalkozunk, hogy mennyivel növekszik a szükséges szerkesztés lépések száma a vizsgált közelítő szögharmadolási módszerek alkalmazása során, a pontosság növelésével. A szerkesztések GeoGebrával történő elkészíthetőségét, valamint annak szoftveres korlátait is elemezzük, és vizsgáljuk, hogyan módosíthatunk a szerkesztési lépéseken a szoftveres ábrázolhatóság érdekében.

**ABSTRACT.** It is known that an arbitrary angle can not be trisected by a Euclidean construction (a construction using compass and ruler only). However, an approximate angle trisection can be constructed this way, within any given level of precision. We consider the problem that which approximate angle trisection method produces good accuracy for many digits in a way that relatively few construction steps are needed to achieve that in a Euclidean construction. We also investigate by how much the number of construction steps is increasing during performing the different construction methods as the accuracy of the approximation is increasing. We analyze the realizability of the constructions with GeoGebra with respect to the software limitations, and we consider how to modify some construction steps, so the constructions become representable with GeoGebra.

### 1. Bevezetés

A szögharmadolás egyike a híres ókori görög matematikai feladatoknak (a másik két ilyen feladat a kör négyszögesítése és a kockakettőzés). Mindhárom geometriai szerkesztési feladat, melyekről kiderült, hogy nem oldhatók meg körzővel és vonalzóval történő szerkesztésekkel.

A szögharmadolási feladat – azaz, hogy adott  $\alpha$  szög esetén körzővel és vonalzóval szerkesszünk meg egy harmadakkora szöget – lehetetlennek bizonyult általános esetben, sőt minden olyan konkrét esetben is, amikor a  $p(x) = 4x^3 - 3x - \cos(\alpha)$  polinom irreducibilis a  $\mathbb{Q}(\cos(\alpha))$  testbővítés felett (azaz nem bontható fel kisebb fokszámú tényezők szorzatára úgy, hogy a tényezők olyan polinomok legyenek, melyek együtthatói a  $\mathbb{Q}(\cos(\alpha))$  test elemei), ld. [9]. Ez a helyzet például, ha a harmadolandó  $\alpha$  szög koszinusza racionális szám, és  $p(x)$  a racionális számok felett irreducibilis polinom. Ezért a  $60^\circ$ -os szög nem harmadolható, mert  $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ , és  $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$  irreducibilis polinom a racionális számok felett.

**KULCSSZAVAK.** Szögharmadolás, euklideszi szerkesztés, Taylor-sor.

**KEYWORDS.** Angle trisection, Euclidean construction, Taylor series.

Amiatt, hogy egy tetszőleges szög egész számú többszöröse megszerkeszthető körzővel és vonalzóval, nem csak  $20^\circ$ -os szög nem szerkeszthető, hanem  $10^\circ$ -os,  $5^\circ$ -os és  $1^\circ$ -os szög sem, valamint mivel tetszőleges szög felezhető körzővel és vonalzóval, ezért  $40^\circ$ -os és  $80^\circ$ -os szög sem szerkeszthető. A szögharmadolási feladat megoldhatatlanságát már az ókor óta sejtették, de bebizonyítani csak a 19. században tudták (Wantzel, 1837).

Bizonyos módokon mégis lehetséges a szögharmadolás, és így feloldhatjuk a megoldhatatlanságot: ha más megfelelő segédeszközt (pl. megjelölhető élű vonalzót), vagy körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető segédgörbét (pl. triszektrix) is használunk a szerkesztéshez, esetleg ha nem pontos szögharmadolást szeretnénk megszerkeszteni, hanem annak csupán egy közelítését, adott hibahatáron belül, ld. [1].

Ebben a tanulmányban közelítő szögharmadolással fogunk foglalkozni: olyan szerkesztésekkel, amelyekkel sok tizedesjegynyi pontossággal közelíthetjük meg egy tetszőlegesen adott szög harmadát körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztési lépések sorozatának eredményeként, hogy például számítógépes geometriai szoftverrel, a szoftver által alkalmazott numerikus módszerek hibahatárán belül megszerkeszthessük a szögharmadot. Valamint foglalkozni fogunk a szerkesztés szoftveres ábrázolásának a nehézségeivel is, és hogy hogyan módosíthatjuk a szerkesztést úgy, hogy a szerkesztés összes lépését megjeleníthessük. A GeoGebra szoftver (ld. [6]) használatának példáján keresztül mutatjuk mindezt be.

## 1. Közelítő szögharmadolás

Szerkesztésen ebben a cikkben mindig körzővel és vonalzóval történő szerkesztést értünk, az illetet euklideszi szerkesztésnek is szokták hívni.

Egy tetszőleges  $\alpha$  szög harmadának egy adott  $\varepsilon > 0$  hibahatáron belüli közelítését megszerkeszthetjük a következőképp: mivel egy szögfelezés elvégezhető körző és vonalzó segítségével, és az eredményül kapott szögre ezt egymás után többször alkalmazva tetszőleges kis szög szerkeszthető, ezért ha az  $\varepsilon$  hibahatárnál kisebb  $\delta$  szöget szerkesztünk megfelelően sokszori egymás utáni szögfelezéssel, akkor a  $\delta$  szögnek megfelelő sokszori többszörözésével tetszőleges szögnek, így pl. az  $\alpha$  szög harmadának egy közelítését is megkaphatjuk  $\varepsilon$  hibahatáron belül. Például a  $k\delta$  egy ilyen közelítő szögharmadolás (ahol  $k$  egy pozitív egész szám), ha  $(k-1)\delta < \frac{\alpha}{3} \leq k\delta$  igaz, és ez ekvivalens a  $3(k-1)\delta < \alpha \leq 3k\delta$  egyenlőtlenség teljesülésével, azaz azt kell csak figyelni a  $3\delta$  szög többszöröseinek a szerkesztésekor, hogy melyik lépésben lesz a nagysága legalább  $\alpha$ .

A jelenleg elterjedt számítógépes szoftverek, ill. geometriai szerkesztő szoftverek közül több is nagy pontosságú számításokat tesz lehetővé sok tizedesjegynyi értékig kiszámítva pontok koordinátáit, távolságokat, szögek nagyságát és sok más mennyiséget, és a számításokhoz tartozó ábrák, ill. a szerkesztések ábráin mindezt ábrázolhatjuk is, a felhasználó által testreszabott módon. Például a GeoGebra 15 tizedesjegynyi pontossággal is megjelenítheti a mennyiségeket.

Ez összhangban van azzal, hogy a számítógépes szoftverek numerikus számításaiban jelenleg a legelterjedtebb az IEEE 754-es szabványban leírt dupla pontosságú bináris lebegőpontos számformátum használata, amely egy kettes számrendszeren alapuló 64 bites számformátum: 52 bit a mantissza, 1 bit az előjel, 11 bit a karakterisztika tárolására szolgál egy 64 bites adatmennyiségben, ld. [7], [8]. Ezért egy szám lebegőpontos ábrázolása ebben a rendszerben a  $\pm(1+m)2^k$  alakban történik, ahol  $m$  egy legfeljebb 52 számjegyű bináris tört,  $0 \leq m < 1$ ,  $-1022 \leq k \leq 1023$  (1–1 érték fenn van tartva a gépi végtelen (*Inf*, „infinity”) és a számot nem eredményező (*NaN*, „not a number”) gépi számítások számára, ezért nem  $2^{11} = 2048$  különböző értéket vehet fel  $k$ , hanem csak 2046-ot). Ezért a legkisebb pozitív  $m$  értéke

(amit gépi epszilonnak is szoktak hívni)  $2^{-52} \approx 2.2 \times 10^{-16}$  ez 15 tizedesjegynyi pontosságú számábrázolást jelent. Ebben a számformátumban a legkisebb pozitív szám  $2^{-1022} \approx 10^{-308}$  nagyságrendű, a legnagyobb szám pedig  $2 \times 2^{1023} \approx 10^{308}$  nagyságrendű, ha a számoknak a felhasználók számára történő tízes számrendszerbeli  $c \times 10^n$  exponenciális alakú megjelenítési lehetőségét is figyelembe vesszük.

Megjegyezzük, hogy bizonyos szoftverek esetén lehetőség van szimbolikus számításokra is, és a geometriai eredményeket így is tárolhatjuk egy bizonyos bonyolultságig. Pl. a GeoGebra Komputeralgebra (CAS) nézetében elvégzett több művelet esetén is ez a helyzet, de mivel a szerkesztési lépések előrehaladtával a számítások egyre bonyolultabb képleteket eredményeznek, eljön a pont, amikor a GeoGebra átvált közelítő törttekkel való számításra, mert képleteknek nagyon sokszori egymásba ágyazása már nincs benne támogatva, hogy a szoftver futása ne lassuljon le.

Ha a körzővel és vonalzóval történő szerkesztésekhez geometriai szoftvereket használunk, akkor a szoftvertől függően, de általában sok tizedesjegynyi pontossággal ellenőrizhetjük a megszerkesztett távolságokat, körsugarakat, szögek nagyságát. És ebben az esetben közelítő szerkesztéseket végrehajtva, a szerkesztési pontosság ellenőrzésére és nagy pontosság elérésére is van lehetőség.

Ezért felmerülnek a következő kérdések:

**1. Probléma.** Hogyan lehet közelítő szögharmadolást nagy pontossággal, viszonylag kevés szerkesztési lépéssel elkészíteni? Melyik szerkesztési módszert érdemes használni?

**2. Probléma.** Hogyan viszonyul egymáshoz a közelítő szögharmadolás szerkesztési pontosságának a növelése, valamint az adott pontosság eléréséhez szükséges szerkesztési lépések számának a növekedése?

Ezekre a problémákra keressük a választ a későbbiekben, csak előbb tisztázzuk, hogy pontosan mit is értünk szerkesztési lépéseken.

## 2. Szerkesztési lépések

Az euklideszi szerkesztések esetén az eredetileg használható idealizált szerkesztési segédeszközök: az egyélű vonalzó, és az összecsucódó körző. Tehát a vonalzónak csak az egyik éle használható szerkesztésre (így például nem szerkeszthető párhuzamos egyenespár a vonalzó két különböző élének berajzolásával). A vonalzó nem megjelölhető, tehát például pontok vagy távolságok megjelölése nem lehetséges rajta. A körzővel pedig olyan kör szerkeszthető, amelynek középpontja és egy kerületi pontja adott, mivel felemeléskor összecsucódik, így távolság körzőnyílásba vételére és átvitelére nem alkalmas.

Persze a modern körző már nem összecsucódó, és manapság szerkesztésekkor az egyélű vonalzó használata mellett gyakran derékszögű vonalzót is használnak, de mindezzel nem bővül a szerkeszthető elemek köre: már Euklidész megmutatta az Elemek c. művében, hogy távolságok átvitele lehetséges az összecsucódó körző segítségével (ebből következik, hogy a modern körző szerkesztései megvalósíthatók az összecsucódó körzővel is), valamint hogy párhuzamos és merőleges egyenesek szerkeszthetők körzővel és vonalzóval is – így a derékszögű vonalzó használata csak egyszerűsíti az ilyen szerkesztéseket.

Szerkesztési lépéseken a szerkesztések legkisebb alapegységeit értjük, ezeket szerkesztési alaplépéseknek, vagy elemi szerkesztési lépéseknek is szokás nevezni, de ebben a cikkben többnyire csak egyszerűen szerkesztési lépéseknek hívjuk őket. A klasszikus szerkesztési lépések a következők:

- 1) Két, már megszerkesztett ponton keresztül vonalzóval egyenest húzhatunk.
- 2) Két, már megszerkesztett pont esetén szerkeszthetünk olyan kört, melynek az egyik pont a középpontja, a másik pont pedig egy kerületi pontja.
- 3) Két, már megszerkesztett metsző egyenes metszéspontja megszerkeszthető.
- 4) Már megszerkesztett, egymást metsző kör és egyenes bármelyik metszéspontja megszerkeszthető.
- 5) Már megszerkesztett, egymást metsző két kör bármelyik metszéspontja megszerkeszthető.

Vegyük észre, hogy a 4)-5) szerkesztési lépésekben az alakzatok (egyenes és kör, két kör) nem lehetnek érintők. Ezen felül, a modern körző és a derékszögű vonalzó (egyélű vonalzóval kombinált) használatával, szerkesztési alaplépéseknek tekinthetők a következők is:

- 6) Három, már megszerkesztett pont esetén szerkeszthető olyan kör, amelynek a középpontja az első pont, a sugara pedig megegyezik a második és harmadik pont távolságával (azaz körzőnyílásba vehető két pont távolsága).
- 7) Már megszerkesztett pont és rá nem illeszkedő, megszerkesztett egyenes esetén szerkeszthető a ponton átmenő és az adott egyenessel párhuzamos egyenes.
- 8) Már megszerkesztett pont és egyenes esetén szerkeszthető a ponton átmenő és az adott egyenesre merőleges egyenes.

Megjegyezzük, hogy sokan külön alaplépéseknek tekintik a körzőnyílásba vételt és az adott középponttal és körzőnyílással rendelkező kör szerkesztését.

Mesterségesnek tűnhet az idealizált szerkesztési segédeszközöknek a használata, és minden szerkesztésnek az ezekhez kapcsolódó szerkesztési szabályokra történő visszavezetése, de ez biztosítja, hogy elméleti vizsgálatokra van lehetőség a szerkeszthetőséget és a szerkesztések bonyolultságát (ld. lépésszámát) illetően.

A modern körzőhöz és a derékszögű vonalzó használatához kapcsolható, utolsó három szerkesztési lépés mindegyikét kiválthatjuk konstans (nem is túl sok) lépésből áll olyan szerkesztéssel, amely csupán a klasszikus szerkesztési lépéseket tartalmazza.

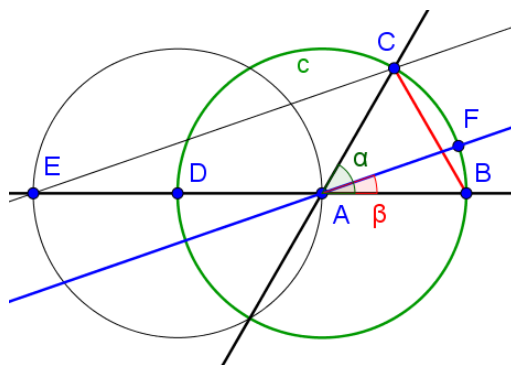
A geometriai szoftverek a gyakrabban használt szerkesztési feladatok megoldásait beemelhetik a szerkesztési eszközök közé, mint pl. a szakaszfelező pont, szakaszfelező merőleges, szögfelező egyenes, három ponton áthaladó kör, körhöz húzott érintő egyenes szerkesztése esetén. De a számítógépes szerkesztési eszközök nem csak körzővel és vonalzóval megvalósítható szerkesztéseket emedhetnek meg, pl. bármilyen beírt értékű szöggel történő forgatás is lehetséges GeoGebrában. Ezért célszerű csak a fentebbi nyolc (ill., ha a derékszögű vonalzó használatát nem engedjük meg, akkorhat) szerkesztési lépést elemi lépésnek tekinteni (a modern körzőt használják mindenhol, így a 6)-os számú szerkesztési lépést szerkesztési alaplépésnek tekintjük – 1 vagy 2 lépésnek), és csakis az ezeknek megfelelő eszközöket használni geometriai szoftverek futtatásakor, amikor körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztéseket szeretnénk készíteni, hiszen minden euklideszi szerkesztés visszavezethető ezekre, és ilyenkor a szerkesztési lépések száma jól jellemzi a szerkesztésünk bonyolultságát.

Minden szerkesztés elején legalább két pont kell, hogy legyen adva (vagy annyi más egyenes, ill. kör, hogy azok metszéspontjaival együtt legyen legalább két pont), és két pont távolságára feltehető, hogy egységnyi (mert hasonlóság erejéig ekvivalens egy ilyen szerkesztés bármely másikkal). A harmadolandó szög lehet olyan, amely megszerkeszthető két adott pontból szerkesztési lépések egymás utáni alkalmazásával (pl. ilyen a  $60^\circ$ -os szög), vagy lehet ettől eltérő típusú, mondjuk három adott pont által meghatározott szög, ahol a harmadik pont nem szerkeszthető meg az első kettőből euklideszi szerkesztéssel.

### 3. Szerkesztési módszerek

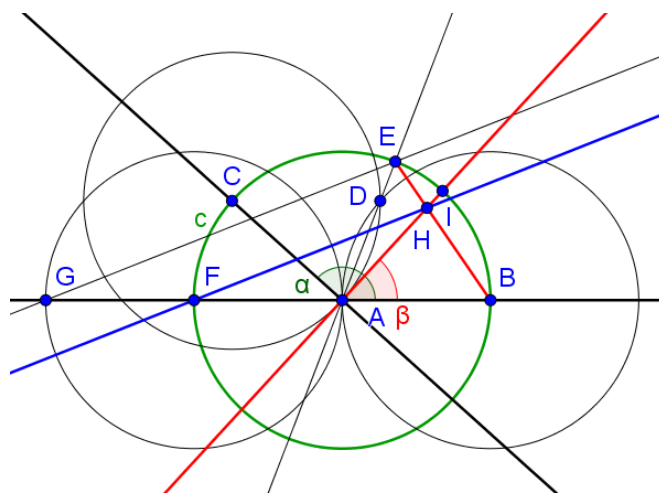
Először három szerkesztési eljárást ismertetünk, amelyekkel közelítő szögharmadolást valósíthatunk meg. Egy  $60^\circ$ -os szög esetén ezekkel a szögharmadolás közelítése  $1^\circ$ -os hibahatáron belül történik. Mindegyik esetben feltehetjük, hogy adott a szög  $A$  csúcsa, és a szögszáraknak az  $A$  csúcs körüli egységnyi sugarú  $c$  körrel vett  $B$  és  $C$  metszéspontjai:  $\alpha = \angle BAC$ .

**1. eljárás (húrharmadolás):** A  $BC$  húrt harmadoljuk a párhuzamos szelők tételét alkalmazva, és az egyik távolabbi (azaz nem a középső) húrharmadot kimetsző középponti szöget ( $\beta = \angle BAF$ ) vesszük. Ez talán a legegyszerűbb, legrövidebb közelítő szögharmadolási szerkesztés, nem túl pontos, de nem is túl pontatlan (ld. 1. ábra).



1. ábra. A  $\angle BAF$  szerkesztése húrharmadolással

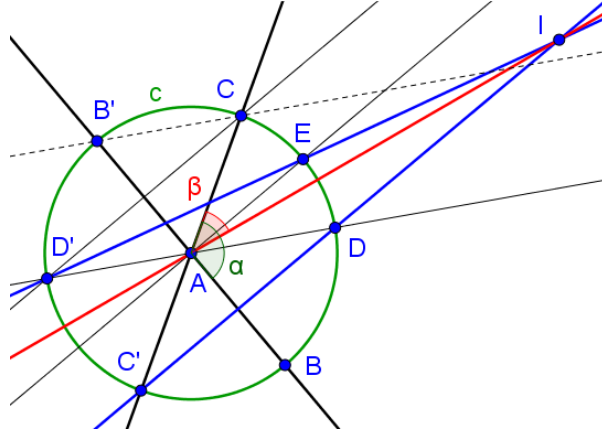
**2. eljárás (Steinhaus módszere):** Az  $\alpha$  szöget felezzük az  $AD$  egyenessel, majd a  $BE$  húrt harmadoljuk a  $H$  pontban a párhuzamos szelők tételét alkalmazva, és a  $BH$  húrdarabot kimetsző középponti szöget ( $\beta = \angle BAI$ ) vesszük (ld. 2. ábra, és [2], [5]).



2. ábra. A  $\angle BAI$  szerkesztése szögfelezés utáni húrharmadolással

**3. eljárás (Segar módszere):** A  $c$  körben a  $B, C$  pontokkal átellenes pontok legyenek  $B'$ , ill.  $C'$ . Az  $\alpha$  szög szögfelezője (amely párhuzamos a  $B'C$  egyenessel) a  $c$  kört a  $D$  pontban metszi. A  $\angle DAC$  szögfelezője (amely párhuzamos a  $D'C$  egyenessel, ahol  $D'$  a  $D$ -vel szemkölti pontja a  $c$  körnek) a  $c$  kört az  $E$  pontban metszi. A  $D'E$  és  $C'D$  egyenesek metszéspontja legyen  $I$ . Ekkor  $\beta = \angle IAC$  adja a közelítő szögharmadolást (ld. 3. ábra és [5]).





3. ábra. A  $IAC\angle$  szerkesztése szelők  $I$  metszéspontja alapján

Ha  $\alpha$  egy  $60^\circ$ -os szög, akkor annak közelítő harmadolására az 1. esetben  $\beta = 19.1066 \dots^\circ$ , a 2. esetben  $\beta = 20.1039 \dots^\circ$ , a 3. esetben pedig  $\beta = 19.9872 \dots^\circ$  szögnagyságok jönnek ki.

Az 1. eljárásban végül is egy szakasznak (amely egy egyenlő szárú háromszög alapja) a harmadolásából jön ki a közelítő szögharmadolás – ez a szögharmadolási problémát annak megoldhatatlansága ellenére megoldani kívánó „szögharmadolók” egyik kedvenc módszere (persze az ügyesebbek az eredetinél egy jóval kisebb szög harmadolására alkalmazzák, míg az adott szögnek a másik, nagyobbik részét egy pontosan megszerkeszthető szög háromszorosaként állítják elő, hogy ne legyen olyan feltűnő az ügyeskedésük, és nagyobb pontosságú legyen a közelítő szögharmadolásuk), csak ők ezzel a szögharmadolást pontosan szeretnék megoldani, mi pedig elfogadjuk, hogy ez csupán egy közelítő szögharmadolást eredményez.

Tetszőleges pontosságú közelítő szögharmadolást szerkeszthetünk bármely konkrét közelítő szögharmadolási eljárás egymás után többszöri alkalmazásával, ha az eljárás a szögharmadnak legalább a felét közelíti tetszőleges szögre: az eljárás valahányadik alkalmazása után eredményül kapott  $\beta$  közelítő szögharmadból kiszámolt  $\alpha - 3\beta$  eltérés szögének az abszolút értékére újra alkalmazzuk az eljárást, végül az eredményül kapott közelítő szögharmadok  $\pm 1$ -szereseinek összege adja majd ki a pontosabb közelítő szögharmadolását az eredeti  $\alpha$  szögnek, megfelelően választott +, ill. – előjelekkel.

Precízebben: legyen  $f: [0, \pi) \rightarrow [0, \pi)$ ,  $x \mapsto f(x)$  az a függvény, amely megadja, hogy egy tetszőleges  $x$  szög esetén  $f(x)$  lesz a szögharmad közelítése a konkrét szögharmadolási szerkesztési eljárás eredményeként, és legyen  $n$  egy pozitív egész szám. Definiáljuk a következőket:  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $\beta_i = f(\alpha_{i-1})$ ,  $\alpha_i = |\alpha_{i-1} - 3\beta_i|$ ,  $\delta_i = \text{sgn}(\alpha_{i-1} - 3\beta_i)$ , amikor  $1 \leq i \leq n$ . (Tehát  $\delta_i$  értéke +1 ill. -1 az  $\alpha_{i-1} - 3\beta_i$  eltérés előjele szerint.) Ezzel rekurzívan definiáltuk az  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  szögsorozatot, valamint a  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  közelítő szögharmadolások sorozatát és a  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  előjelsorozatot (amely az  $\alpha_{i-1} - 3\beta_i$  eltérések előjeleit kódolja).

Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha &= 3\beta_1 + \delta_1\alpha_1 = 3\beta_1 + \delta_1(3\beta_2 + \delta_2\alpha_2) = \dots \\ &= 3\beta_1 + \sum_{k=2}^n \left( \left( \prod_{i=1}^{k-1} \delta_i \right) 3\beta_k \right) + \left( \prod_{i=1}^n \delta_i \right) \alpha_n, \end{aligned}$$

azaz az  $\alpha$  szögre adódó nagyobb pontosságú közelítő szögharmadolás a

$$\beta = \beta_1 + \gamma_1\beta_2 + \dots + \gamma_{n-1}\beta_n$$

szögeként szerkeszthető meg, ahol  $\gamma_i = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  (tehát  $\gamma_i \in \{-1, +1\}$ ).

Fennáll  $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k+1}} + \dots$ , és  $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots$  a végtelen mértani sorozatok összegképlete alapján, ezért az  $\alpha$  szög harmada felírható kétféleképp, egy  $n$  tagú mértani sorozat elemeinek az összegéhez hozzáadva a maradéktagot (ld. [1]):

$$\frac{\alpha}{3} = \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} - \dots + (-1)^{n-2} \cdot \frac{\alpha}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{\alpha}{2^n} \right) + (-1)^n \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2^n},$$

és

$$\frac{\alpha}{3} = \left( \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{16} + \dots + \frac{\alpha}{4^n} \right) + \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{4^n}.$$

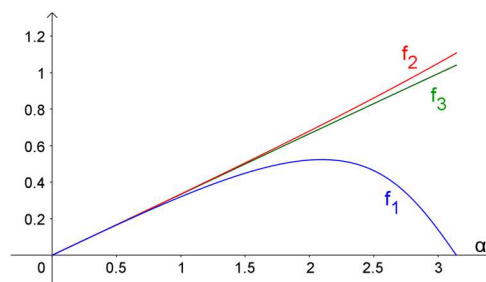
Mindkét összegképlet alapján elmondható, hogy szögfelezésekkel megszerkeszthető az egyes képletekben szereplő  $n$  tagú mértani sorozat összege, az elsőnél tagonként felére csökken az eltérés, a másodiknál pedig tagonként negyedére csökken az eltérés  $\frac{\alpha}{3}$ -tól (de ott tagonként két szögfelezés egymásutánja szükséges a szögnegyedeléshez). Mivel egy szögfelezés legalább 4 szerkesztési lépést igényel, és  $\alpha \geq 1$  esetén legalább 50 szögfelezés szükséges ahhoz, hogy 15 tizedesjegyre (azaz 52 bináris jegyre) megközelítse a szerkesztett szögösszeg az  $\frac{\alpha}{3}$  szöget, így legalább  $50 \cdot 4 = 200$  szerkesztési lépésre van ehhez szükség csak szögfelezések, és esetleges szögösszegek, ill. különbségek szerkesztésével.

Felírva a fejezet elején leírt 1-3. közelítő szögharmadolási eljárások szögharmadot közelítő eredményeinek függvényképleteit, és az azokhoz tartozó Maclaurin-sor (azaz a 0 helyen vett Taylor-sor) első néhány tagját (ld. [4]), a következők adódnak (a Maclaurin-polinomok esetében radiánban vett  $\alpha$  szögmértékekkel számolva, radiánban jön ki az eredmény; a trigonometrikus függvényeket tartalmazó képletek fokban vett szögmértékek esetén helyes eredményt adnak fokokban számolva is):

Az 1. eljárás függvénye:  $f_1(\alpha) = \frac{\alpha}{2} - \arctg\left(\frac{\tg(\frac{\alpha}{2})}{3}\right) = \frac{\alpha}{3} - 0.0123 \dots \cdot \alpha^3 + O(\alpha^5)$

A 2. eljárás függvénye:  $f_2(\alpha) = \arctg\left(\frac{2 \sin(\frac{\alpha}{2})}{1+2 \cos(\frac{\alpha}{2})}\right) = \frac{\alpha}{3} + 0.0015 \dots \cdot \alpha^3 + O(\alpha^5)$

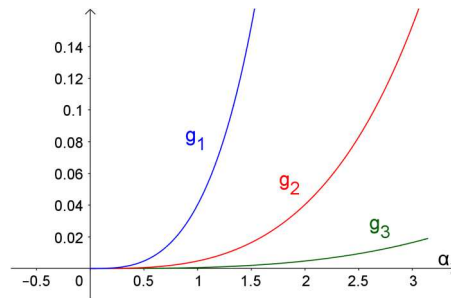
A 3. eljárás függvénye:  $f_3(\alpha) = \arctg\left(\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})+2 \sin(\frac{\alpha}{4})}{\cos(\frac{\alpha}{2})+2 \cos(\frac{\alpha}{4})}\right) = \frac{\alpha}{3} - 0.00019 \dots \cdot \alpha^3 + O(\alpha^5)$



4. ábra. A vizsgált három közelítő szögharmadolási eljárás kimeneti függvényei

Tehát  $f_i(\alpha)$  egy harmadrendű közelítése  $\frac{\alpha}{3}$ -nak ( $i = 1,2,3$ ), azaz a különbségük egy konstans  $\cdot \alpha^3$  típusú képlettel felülről becsülhető, és így nagyjából megháromszorozódik (de olykor ennél jobban növekszik) a helyes tizedesjegyek száma mindhárom közelítő szögharmadolási eljárásnál, azok egyszeri alkalmazásával. Az 1. és 3. eljárások esetén alsó becslés adódik, így akkor  $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ , a 2. eljárás esetén felső becslés adódik, akkor

pedig  $\beta = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \dots + (-1)^{n-1}\beta_n$  a szögharmadolás közelítése, ha  $n$ -szer alkalmazzuk ugyanazt a közelítő szögharmadolási eljárást egymás után a korábban leírt módon ( $n$  egy tetszőleges pozitív egész szám).



5. ábra. A  $g_i(\alpha) = |\alpha - 3f_i(\alpha)|$  eltérésfüggvények ( $i=1,2,3$ )

Mivel  $\cos(\alpha/3)$  a gyöke a  $4x^3 - 3x = \cos(\alpha)$  egyenletnek,  $\sin(\alpha/3)$  pedig a gyöke a  $3x - 4x^3 = \sin(\alpha)$  egyenletnek, ezért a numerikus módszerek standard gyökközelítési eljárásai is alkalmazhatók közelítő szögharmadolásra, hiszen egységszakaszt felvéve, egy adott  $x$  hosszúságú szakasz esetén az  $x^2, x^3, 1/x$  hosszúságú szakaszok is mind megszerkeszthetők (pl. a párhuzamos szelők tételét alkalmazhatjuk e célból megfelelően sokszor), és így olyan szakasz is megszerkeszthető, amelynek hossza  $x$ -nek tetszőleges, racionális együtthatós racionális törtfüggvénye.

Ezért egyenlet átrendezéséből adódó iterációs módszerek (elsőrendű közelítés), a Newton-féle érintő módszer (másodrendű közelítés), és a Newton-módszernél kevesebb számítást (és így jelen esetben kevesebb szerkesztési lépést) igénylő húrmódszer (elsőrendű közelítés) is megvalósíthatók szerkesztéssel, ld. [3]. Sőt, simulókörral történő gyökközelítés is szerkeszthető (harmadrendű közelítés, ld. [10]), mivel  $\sqrt{x}$  hosszúságú szakasz is szerkeszthető a Pitagorasz-tétel alkalmazásával; vagy a simulókört közelítő, az egyenlet polinomjának a görbéjén felvett 3 egymáshoz közeli ponton átmenő kört véve is kaphatunk gyökközelítést. Mindezekkel az eljárásokkal az a probléma, hogy sokkal hosszadalmasabban szerkeszthetők meg, mint az ebben a fejezetben korábban ismertetett három eljárás bármelyike, és nem adnak azoknál jobb közelítést.

Megemlítjük még, hogy Yates [11] könyvében jópár további, geometriai alapú közelítő szögharmadolási eljárást felsorol, de azok amikor jobb közelítést adnak, mint az ebben a fejezetben ismertetett 1-3. eljárások, akkor annyiaval több szerkesztési lépésből állnak azoknál, hogy sok tizedesjegynyi pontosságú közelítést kevesebb szerkesztési lépésből lehet megadni az 1-3. eljárásoknak a fejezetben korábban leírt módon történő egymás utáni alkalmazásával, mint a Yates által felsorolt módszerek többszöri alkalmazásával.

Jelölje  $L(i, n)$  annak a szerkesztésnek a lépésszámát, amikor az  $i$ . eljárást  $n$ -szer egymás után alkalmazva egy szög közelítő harmadolását kapjuk,  $P(i, n)$  pedig jelölje azt, hogy mennyi tizedesjegynyre pontosan jön ki ekkor a legfeljebb  $60^\circ$ -os szög harmadolása. (Mivel az eltérésfüggvények növekedők – ld. 5. ábra –, így elég a pontosan  $60^\circ$  esetét vizsgálni.)  $L(1, n) = 11n - 7$ , ha  $n \geq 2$ , ekkor mind a nyolc szerkesztési alaplépést használhatjuk.  $L^*(1, n) = 13n - 7$ , ha csak az első hat szerkesztési lépést fogadjuk el alaplépéseknek, valamint a távolság körzőnyílásba vételét és az azzal a körzőnyílással való kör rajzolását egy lépésnek vesszük (ha ez utóbbit két lépésnek vesszük, akkor  $L^+(1, n) = 17n - 10$  a lépésszám).

Úgy kapjuk meg  $L(1, n)$  értékét ( $n \geq 2$  esetén), hogy adott  $A, B, C$  pontok és  $c$  kör, valamint  $AB$  és  $AC$  szögszárak (egyenesek) esetén 3 lépésben lehet a  $D$  és  $E$  pontokat megszerkeszteni, 3 további lépés szükséges az  $F$  pont megszerkesztéséhez, és utána 6 lépés

szükséges  $\alpha_1 = \alpha - 3\beta_1$  megszerkesztéséhez úgy, hogy a  $c$  körön megszerkesztésre kerüljön egy olyan  $G$  pont, amelyre  $|BAG\angle| = \alpha_1$ . Az utóbbi 9 lépés az 1. eljárás minden egyes újabb alkalmazásakor megtörténik, kivéve a végén, amikor  $\alpha_n = \alpha_{n-1} - 3\beta_n$  megszerkesztésére nincs szükség, így akkor az utolsó 6 lépésre nincs szükség. Végül  $2(n-2)$  lépés szükséges  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$  megszerkesztéséhez, mert a  $\beta_1, \beta_2$  szögeket már az eljárás első két alkalmazásakor úgy szerkeszthetjük, hogy az  $AB$  egyenes két különböző félsíkjában legyenek, a többi  $n-2$  esetben pedig egymás után felmérjük a szögeket a  $c$  körön felvett pontok segítségével. Kiszámítható, hogy  $P(1,1) = 1$ ,  $P(1,2) = 5$ ,  $P(1,3) = 15$  adódik a tizedesjegyek pontosságára. Így az 1. eljárás háromszori alkalmazása során elérjük a 15 tizedesjegy pontos-ságot, a szerkesztési lépések száma ekkor  $L(1,3) = 26$  (ill.  $L^*(1,3) = 32$ , és  $L^+(1,3) = 41$ ).

Továbbá kiszámítható, hogy  $P(2,1) = 2$ ,  $P(2,2) = 9$ ,  $P(2,3) \geq 27$ ,  $L(2,n) = 17n - 5$ ; és  $P(3,1) = 3$ ,  $P(3,2) = 12$ ,  $P(3,3) \geq 36$ ,  $L(3,n) = 19n - 5$ , és így a 15 tizedesjegynyi pontosságot az 1. eljárás során érjük el a legkevesebb szerkesztési lépésben.

Az 1-3. eljárások többszöri alkalmazásáról nem mellékelünk ábrát, mivel egyre csökken a harmadolandó szögek nagyságrendje, és így mindegyik újbóli alkalmazás ábrázolása esetén másik, nagyobb léptékű ábrára lenne szükség, ahol éppen csak az eljárás aktuális alkalmazása látszik, amely minden esetben ugyanúgy történik.

Az IEEE 754-es szabvány dupla pontosságúnál nagyobb pontosságú bináris lebegőpontos számformátumai a kiterjesztett (80 bites), a négyszeres (128 bites) és a nyolcszoros pontosságú (256 bites) számformátumok, melyek 18, 34, ill. 71 tizedesjegynyi pontosságot (azaz 63, 112, ill. 236 bináris jegynyi pontosságot) tesznek lehetővé. Mivel az 1-3. eljárások egyszeri újbóli alkalmazásával a szögharmadolás legalább háromszor annyi tizedesjegyre lesz helyes, így  $P(1,4) \geq 45$ ,  $P(1,5) \geq 135$ , így az 1. eljárást 4-szer alkalmazva, összesen  $L(1,4) = 37$  szerkesztési lépés során elérjük a 18, sőt a 34 tizedesjegynyi pontosságot is, valamint 5-ször alkalmazva, összesen  $L(1,5) = 48$  szerkesztési lépés során elérjük a 71 tizedesjegynyi pontosságot (az 1. eljárást érdemes választani, a három eljárás közül ennél lesz a legkisebb a lépésszám, amikor a becsült pontosságok elérik a kívánt számú tizedesjegynyt).

#### 4. Szoftveres korlátok, GeoGebrával történő ábrázolhatóság

Mivel a GeoGebra numerikus számításokat végez el a pontok, egyenesek és körök ábrázolásához, ezért a túl nagy és túl kis léptékű ilyen típusú objektumokat nem lehet megjeleníteni. Úgy tűnik, hogy csak  $10^{-7}$  és  $10^{154}$  közötti nagyságrendű paraméterek (koordináták, sugarak) esetén tudja ezeket ábrázolni a GeoGebra. Van, hogy az egyeneseket, köröket ábrázolja a GeoGebra, de a metszéspontjaikat nem, vagy nem jól ábrázolja (pl. körök metszéspontjait csak  $10^{-5}$  nagyságrendű sugártól, kör és egyenes, valamint két egyenes metszéspontjait csak  $10^{-7}$  nagyságrendű paraméter értékektől). Emögött az lehet, hogy túl kis számokkal kellene dolgoznia a szoftvernek a metszéspontok kiszámításához.

Ezért a szerkesztések során érdemes a nagyon kis köröket elkerülni, helyettük másik, nagyobb köröket alkalmazni a szerkesztési lépések során. Szerencsére ez általában megvalósítható, esetleg néhány szerkesztési lépéssel hosszabb lesz emiatt a szerkesztés.

A GeoGebra fokban megadott szögek esetén teljes pontosságot jelez már 15-nél kevesebb számjegynyi egyezés esetén is: például a 3. eljárást kétszer alkalmazva, 12 tizedesjegynyi a pontosság radiánban számolva, de fokban mért szögnél mégis teljes pontosságot ( $0^\circ$  fok eltérést) jelez. Ennek oka, hogy a GeoGebra a szögeket fok formátumban történő tároláskor  $180^\circ$  foknak a racionális törtjeiként tartja nyilván, amelynek során a 15 tizedesjegynyi pontosság helyett csak kevesebbel dolgozik.

A geometriai szerkesztések szebbé, átláthatóbbá tehetők, ha bizonyos esetekben egész egyenesek helyett csak szakaszokat, és egész körök helyett csak köríveket ábrázolunk. Van, amikor érdemes körök sugarát is berajzolni megfelelő helyre, ha az ábrázolás egyértelműségéhez ez szükséges.

Lehetőség szerint érdemes elkerülni egymáshoz nagyon közeli pontok, ill. nagyon rövid szakaszok szerkesztését, mert egy ábrában egyszerre nem szemléltethetők nagy és sok nagyságrenddel kisebb távolságok egyaránt. Ha mégsem lehet elkerülni ezt, akkor érdemes több ábrát készíteni a szerkesztésről, vagy annak bizonyos részleteiről, különböző léptékekben, hogy a kis részletek is jól látszódnak.

## 5. Összefoglaló

Meglepően kevés szerkesztési lépés elégséges szögharmadolás 15 tizedesjegynyi pontosságú szerkesztéséhez: 26 lépés (ill. 32 vagy 41 lépés, ha derékszögű vonalzó használatát nem engedélyezzük, és távolság körzőnyílásba történő felvételét és azzal a körzőnyílással történő, már megszerkesztett középpontú kör rajzolását 1 vagy 2 szerkesztési lépésnek vesszük), és mivel a szerkesztés pontosságának megháromszorozása aránylag kevés – tizenegy – szerkesztési lépéssel lehetséges, így 34, ill. 71 tizedesjegynyi pontosságú szögharmadolás is megvalósítható viszonylag kevés (37, ill. 48) szerkesztési lépéssel. De hiába lehetséges a geometriai mennyiségeknek (pontok koordinátáinak, távolságoknak, szögeknek, körsugaraknak) valamilyen pontosságú szoftveres megjelenítése, előfordulhat, hogy a szerkesztésekben előforduló geometriai mennyiségek pontossága kicsit kisebb nagyságrendű a szoftveres lebegőpontosszámszámformátum pontosságánál, a közbeeső számítások esetlegesen eltérő nagyságrendjei és ebből adódó számítási hibalehetőségek miatt. A szoftverrel elvégzett szerkesztések megjeleníthetőségéhez pedig szükséges a nagyon kis sugarú körök szerkesztésének elkerülése, amely megoldható esetenkénti néhányval több szerkesztési lépésben.

## Köszönetnyilvánítás.

Szeretném megköszönni Németh Lászlónak, hogy erről a témakörrel előadhattam Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2019-es programjában.

## Irodalomjegyzék

- [1] Angle Trisection, Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Angle\\_trisection](https://en.wikipedia.org/wiki/Angle_trisection)
- [2] Angle Trisection, Wolfram MathWorld, <https://mathworld.wolfram.com/AngleTrisection.html>
- [3] **Faragó, I., Horváth R.**, Numerikus módszerek, BME Matematika Intézet, Budapest (2011), pp. 309.
- [4] **Fritz, J., Kónya, I.**, Függvénysorok, BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar, Budapest (2007), pp. 51.
- [5] **Gauld, D.**, Approximate Angle Trisection, The College Mathematics Journal **15** No. 5 (1984), pp. 420-422.
- [6] GeoGebra, <https://www.geogebra.org/>
- [7] IEEE lebegőpontos számformátum, Wikipédia, [https://hu.wikipedia.org/wiki/IEEE\\_lebeg%C5%91pontos\\_sz%C3%A1mform%C3%A1tum](https://hu.wikipedia.org/wiki/IEEE_lebeg%C5%91pontos_sz%C3%A1mform%C3%A1tum)
- [8] IEEE 754, Wikipédia, [https://en.wikipedia.org/wiki/IEEE\\_754](https://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754)
- [9] **Kovács, Z.**, Geometria szerkesztések I. (Euklidészi szerkesztések), Debreceni Egyetem Matematikai és Informatikai Intézete, Debrecen (2001), pp. 23., <http://zeus.nyf.hu/~kovacs/szerk.pdf>
- [10] Osculating circle, Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Osculating\\_circle](https://en.wikipedia.org/wiki/Osculating_circle)
- [11] **Yates, R.**, The Trisection Problem, National Council of Teachers of Mathematics, Washington D.C. (1971), pp. 78.



## Az általánosított oktonióalgebrák egy új felépítéséről

**Péntek Kálmán**

ELTE SEK TTMK Savaria Matematikai Tanszék  
pentek.kalman@sek.elte.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Az általános Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárással a valós számok  $R$  testéből kiindulva felépíthetjük az általánosított komplex számok  $C_\alpha$  kommutatív és asszociatív algebráját. Ennek megkettőzésével nyerhetjük az általánosított kvaterniók  $H_{\alpha\beta}$  nem kommutatív, de asszociatív algebráját. Innen pedig ismételt megkettőzéssel adódik az általánosított oktoniók  $O_{\alpha\beta\gamma}$  nem kommutatív és nem is asszociatív algebrája.

Közismert, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra egy alkalmas részalgebrájával. Ám az általános oktoniók  $O_{\alpha\beta\gamma}$  algebrája nem asszociatív, ezért nem reprezentálható mátrixokkal. E probléma megoldására M. Zorn 1933-ban kidolgozta a split oktoniók reprezentációját vektor-mátrixok segítségével. Az előadás utolsó részében ezt az eredményt általánosítva teljesen általánosán megadjuk az általánosított oktoniók algebrájának egy, a vektor-mátrixok fogalmának általánosításán alapuló reprezentációját.

**ABSTRACT.** In the paper with the use of generalized Cayley-Dickson process we construct the commutative and associative algebras of generalized complex numbers  $C_\alpha$ , the non commutative, but associative algebras of generalized quaternions  $H_{\alpha\beta}$  and the non commutative, non associative algebras of generalized octonions  $O_{\alpha\beta\gamma}$ .

Any finite dimensional associative algebra is algebraically isomorphic to a subalgebra of a total matrix algebra, but the algebras of octonions  $O_{\alpha\beta\gamma}$  is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined vector-matrix representation for split octonions algebra in 1933.

In the last section of the paper we construct the generalized vector-matrix representation of generalized octonions  $O_{\alpha\beta\gamma}$ .

### 1. Bevezetés

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) fedezte fel 1843-ban a  $\mathbb{H}$  valós kvaterniók 4-dimenziós nem kommutatív, de asszociatív algebráját (*HAMILTON 1844, 1847*). Még ebben az évben alkotta meg John Thomas Graves (1806-1870) az  $\mathbb{O}$  valós oktoniók 8-dimenziós nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját. Eredményeit azonban nem publikálta, csupán Hamiltonnal folytatott baráti levelezésében írta le. Arthur Cayley (1821-1895) 1845-ben jutott el szintén az oktoniókhoz és publikálta is az elliptikus függvényekről írt dolgozatának függelékében (*CAYLEY 1889*), ezért nevezik ezeket Cayley-féle számoknak.

Leonard Eugene Dickson (1874-1954) 1912-ben értelmezte egy test feletti  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  általánosított kvaternióalgebra fogalmát, 1919-ben pedig megalkotta a neutrális elemes algebrák későbbiekben Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárásnak nevezett módszerét. Ennek felhasználásával a Hamilton-féle kvaterniók  $\mathbb{H}$  algebrájának megkettőzésével építette fel a Cayley-féle számok, a valós  $\mathbb{O}$  oktoniók algebráját (*DICKSON 1912, 1919*).

A Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárást Dickson tanítványa Abraham Adrien Albert (1905-1972) általánosította (*ALBERT 1942*), ezzel lehetővé vált a valós számok  $\mathbb{R}$  algebrájából kiindulva az általánosított komplex számok  $\mathbb{C}_\alpha$ , majd az általánosított kvaterniók  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  struktúrájának egységes szemléletű tárgyalása. Ennek részletes magyarnyelvű bemutatását találhatjuk például (*PÉNTEK 2018*) dolgozatában.

Ebben a munkában e megkezdett utat folytatva az általánosított kvaternióalgebrák  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  struktúrájából kiindulva felépítjük az általánosított oktoniók  $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  algebráját. Jól ismert, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a megfelelően választott teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy minden ilyen algebrának megadhatjuk a mátrix-reprezentációját. Így megadható a  $\mathbb{C}_\alpha$  és a  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  struktúrák mátrix-reprezentációja, például (*PÉNTEK 2018*). Az általánosított oktoniók  $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  algebrája azonban nem asszociatív, így e struktúra mátrixokkal nem reprezentálható.

Max August Zorn (1906-1993) 1933-ban megadta a split oktoniók algebrájának vektor-mátrix-reprezentációját (*ZORN 1933*). Módszere némi módosítással alkalmazható a klasszikus oktoniók  $\mathbb{O}$  stuktúrájának vektor-mátrix-reprezentációjára is (*EBBINGHAUS ET AL. 1991, KATARAS – HALICI 2018*). Dolgozatunk fő eredményeként e módszert általánosítva megadjuk az általánosított oktoniók  $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  struktúrájának vektor-mátrix-reprezentációját.

A most következő két fejezetben összefoglaljuk és kiegészítjük azokat az általánosított komplex számokra és az általánosított kvaterniókra vonatkozó legfontosabb ismereteket (*PÉNTEK 2018*), amelyek a dolgozat fő témájához, az általánosított oktoniók felépítéséhez és tárgyalásához szükségesek.

## 2. Az általánosított komplex számok

Jelölje  $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$  a valós számok testét, 0 az összeadás, 1 a szorzás neutrális elemét, legyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  egy rögzített valós paraméter! Az  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(a_0, a_1) : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$  direktszorzatban értelmezzünk műveleteket a következő módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot (a_0, a_1) := (r \cdot a_0, r \cdot a_1) \quad (1)$$

$$\text{összeadás: } (a_0, a_1) + (b_0, b_1) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1) \quad (2)$$

$$\text{szorzás: } (a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) := (a_0 \cdot b_0 - \alpha \cdot a_1 \cdot b_1, a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \quad (3)$$

ahol  $r \in \mathbb{R}$ ,  $(a_0, a_1), (b_0, b_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tetszőleges elemek.

Az  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  direktszorzat az (1), (2) és (3) műveletekkel egy 2-dimenziós kommutatív, asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az  $\mathbb{R}$  test felett, amelyben a  $0_{\mathbb{C}} := (0, 0)$  az összeadás,  $1_{\mathbb{C}} := (1, 0)$  a szorzás neutrális eleme. Ezen algebrában, mint  $\mathbb{R}$  feletti 2-dimenziós vektortérben az  $1_{\mathbb{C}} := (1, 0)$  és az  $i := (0, 1)$  elempár alkot természetes bázist.

Az  $S := \{(a_0, 0) : a_0 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  részalgebrát alkot az  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  algebrában és az  $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{R} \rightarrow S, a_0 \mapsto (a_0, 0)$  egy algebra-izomorfizmus, így pedig az  $f_{\mathbb{C}}^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a_0 \mapsto (a_0, 0)$  egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát  $\mathbb{C}_\alpha$  szimbólummal jelöljük és az *általánosított komplex számok* algebrájának nevezzük. Speciálisan az  $\alpha = 1$  estben a klasszikus komplex számok  $\mathbb{C}$  algebrájához jutunk. Az általánosított komplex számok további típusait említi és tárgyalja (*ROSENFELD 1997*) művében.

Az  $i = (0, 1) \in \mathbb{C}_\alpha$  elemre teljesül  $i^2 = -\alpha$  és minden  $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}_\alpha$  elem felírható  $a_0 + a_1 \cdot i$  alakban, amely előállítást az általánosított komplex szám *algebrai* alakjának nevezzük.

A  $z = a_0 + a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$  *konjugáltján* az  $\bar{z} = a_0 - a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$  általánosított komplex számot, *normáján* pedig a  $N(z) := z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 \in \mathbb{R}$  valós számot értjük,

a  $z = a_0 + a_1 \cdot i, t = b_0 + b_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$  elempár *skaláris szorzatának* a  $\langle z, t \rangle := a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 \in \mathbb{R}$  valós számot nevezzük.

Az  $\mathbb{R}$  test feletti  $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1 \in \mathbb{R} \right\}$  alakú mátrixok egy részalgebrát alkotnak a másodrendű kvadratikus mátrixok 4-dimenziós  $M_2(\mathbb{R})$  teljes mátrixalgebrájában.

A  $g^{\mathbb{C}}: \mathbb{C}_\alpha \rightarrow M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), a_0 + a_1 \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix}$  leképezés egy algebra-izomorfizmus, így az általánosított komplex számok  $\mathbb{C}_\alpha$  algebrája reprezentálható az  $M_2(\mathbb{R})$  teljes mátrixalgebra  $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$  részalgebrájával.

### 3. Az általánosított kvaterniók

Az általánosított komplex számok  $\mathbb{C}_\alpha$  algebrájából kiindulva értelmezzünk műveleteket a  $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha := \{(z_0, z_1) : z_0, z_1 \in \mathbb{C}_\alpha\}$  direktszorzatban a következő módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot (z_0, z_1) := (r \cdot z_0, r \cdot z_1) \quad (1')$$

$$\text{összeadás: } (z_0, z_1) + (w_0, w_1) := (z_0 + w_0, z_1 + w_1) \quad (2')$$

$$\text{szorzás: } (z_0, z_1) \cdot (w_0, w_1) := (z_0 \cdot w_0 - \beta \cdot z_1 \cdot \overline{w_1}, z_0 \cdot w_1 + z_1 \cdot \overline{w_0}) \quad (31')$$

ahol  $\beta \in \mathbb{R}$  egy rögzített valós paraméter, továbbá  $r \in \mathbb{R}, (z_0, z_1), (w_0, w_1) \in \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$  tetszőlegesek.

A  $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$  direktszorzat az (1'), (2') és (3') műveletekkel egy 4-dimenziós nem kommutatív, de asszociatív és neutrális elemes algebrát alkot az  $\mathbb{R}$  test felett, amelyben  $0_{\mathbb{H}} := (0_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}})$  az összeadás és  $1_{\mathbb{H}} := (1_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}})$  a szorzás neutrális eleme. Ezen algebrában, mint  $\mathbb{R}$  feletti 4-dimenziós vektortérben az  $1_{\mathbb{H}}, (i, 0_{\mathbb{C}}), j := (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}}), (0_{\mathbb{C}}, i)$  elemnégyes egy természetes bázist alkot.

A  $T := \{(z_0, 0_{\mathbb{C}}) : z_0 \in \mathbb{C}_\alpha\} \subset \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$  részalgebrát alkot a  $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$  algebrában és az  $f_{\mathbb{H}}: \mathbb{C}_\alpha \rightarrow T, z_0 \mapsto (z_0, 0_{\mathbb{C}})$  leképezés egy algebra-izomorfizmus, így pedig az  $f_{\mathbb{H}}^*: \mathbb{C}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha, z_0 \mapsto (z_0, 0_{\mathbb{C}})$  egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát a  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  szimbólummal jelöljük és az *általánosított kvaterniók* algebrájának nevezzük. Speciálisan, ha  $\alpha = \beta = 1$ , akkor a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók  $\mathbb{H}$  algebráját nyerjük. Az általánosított kvaterniók további típusait említi (JAFARI – YAYLI 2015) és tárgyalja is (ROSENFELD 1997) művében.

A  $j = (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}}) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  elemre teljesül  $j^2 = -\beta$  és minden  $q = (z_0, z_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  felírható  $q = z_0 + z_1 \cdot j$  alakban, amely előállítást az általánosított kvaternió *komplex algebrai alakjának* nevezzük.

Ha  $z_0 = a_0 + a_1 \cdot i, z_1 = a_2 + a_3 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$  és  $q = z_0 + z_1 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ , akkor a  $q$  kvaternió felírható a  $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$  alakban, amelyet a  $q$  elem *valós algebrai alakjának* hívjuk, az  $1, i, j, k := i \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  elemeket pedig *általánosított kvaternióegységeknek* nevezzük.

Az általánosított kvaternióegységek Cayley-féle szorzási táblázata:

$\cdot$	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	$-\alpha$	$k$	$-\alpha j$
$j$	$j$	$-k$	$-\beta$	$\beta i$
$k$	$k$	$\alpha j$	$-\beta i$	$-\alpha \beta$



Ha  $z_0 = a_0 + a_1 \cdot i$ ,  $z_1 = a_2 + a_3 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ , akkor a  $q = z_0 + z_1 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  *konjugáltján* a

$$\bar{q} := \bar{z}_0 - z_1 \cdot j = a_0 - a_1 \cdot i - a_2 \cdot j - a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}, \quad (4')$$

*normáján* pedig az

$$N(q) := q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 + \beta \cdot a_2^2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3^2 \in \mathbb{R} \quad (5')$$

elemet értjük. A  $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ ,  $q_1 = b_0 + b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  elempár skaláris szorzatának a

$$\langle q_0, q_1 \rangle := a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R} \quad (6')$$

valós számot nevezzük.

A  $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  általánosított kvaternió *valós részén* (skalár rész) az

$$S(q) := a_0 \in \mathbb{R} \quad (7')$$

valós számot, képzetes részén (vektor rész) a

$$V(q) := a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{R}^3 \quad (8')$$

vektort értjük.

Ha  $q_0 = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ ,  $q_1 = b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  két tiszta képzetes általánosított kvaternió, akkor szorzatuk

$$\begin{aligned} q_0 \cdot q_1 = & -(\alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3) + \\ & + [(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k] \end{aligned}$$

lesz. Ez alapján e két tiszta képzetes kvaternió *skaláris szorzatán* a (6') összefüggéssel összhangban a

$$q_0 \circ q_1 := \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R} \quad (9')$$

skalárt, *vektoriális szorzatán* pedig a

$$q_0 \times q_1 := (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k \in \mathbb{R}^3 \quad (10')$$

vektort értjük. Ekkor e kvaterniókra a  $q_0 \cdot q_1 = -(q_0 \circ q_1) + (q_0 \times q_1)$  összefüggés teljesül.

A tiszta képzetes általánosított kvaterniók a skalárral való szorzással és az összeadással  $\mathbb{R}^3$  vektorteret, továbbá a (9') skaláris szorzással az  $E_{\alpha\beta}^3(\mathbb{R})$  szimbólummal jelölt általánosított euklideszi vektorteret alkotnak az  $\mathbb{R}$  test felett.

$$\text{Az } \mathbb{R} \text{ feletti } M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -\alpha a_1 & a_0 & -\alpha a_3 & a_2 \\ -\beta a_2 & \beta a_3 & a_0 & -a_1 \\ -\alpha \beta a_3 & -\beta a_2 & \alpha a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \text{ alakú}$$

mátrixok egy részalgebrát alkotnak a negyedrendű kvadratikus mátrixok 16-dimenziós  $M_4(\mathbb{R})$  teljes mátrixalgebrájában.

$$A \quad g^{\mathbb{H}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \rightarrow M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}), \quad a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -\alpha a_1 & a_0 & -\alpha a_3 & a_2 \\ -\beta a_2 & \beta a_3 & a_0 & -a_1 \\ -\alpha\beta a_3 & -\beta a_2 & \alpha a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

leképezés egy algebra-izomorfizmus, így az általánosított kvaterniók  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  algebrája reprezentálható az  $M_4(\mathbb{R})$  teljes mátrixalgebra  $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$  részalgebrájával.

#### 4. Az általánosított oktoniók

Az általánosított kvaterniók  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  algebrából kiindulva értelmezzünk műveleteket a  $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta} := \{(q_0, q_1): q_0, q_1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}\}$  direktszorzatban a következő módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot (q_0, q_1) := (r \cdot q_0, r \cdot q_1) \quad (1'')$$

$$\text{összeadás: } (p_0, p_1) + (q_0, q_1) := (p_0 + q_0, p_1 + q_1) \quad (2'')$$

$$\text{szorzás: } (p_0, p_1) \cdot (q_0, q_1) := (p_0 \cdot q_0 - \gamma \cdot \overline{q_1} \cdot p_1, p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0) \quad (3'')$$

ahol  $\gamma \in \mathbb{R}$  egy rögzített valós paraméter, valamint  $r \in \mathbb{R}, (p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  tetszőlegesek.

Hosszadalmas, bár nem túl nehéz számításokkal bizonyítható a következő

**1. Tétel.** A  $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  direktszorzat az  $(1'')$ ,  $(2'')$  és  $(3'')$  műveletekkel egy 8-dimenziós nem kommutatív, nem asszociatív, de neutrális elemes algebrát alkot az  $\mathbb{R}$  test felett, amelyben  $0_{\mathbb{O}} := (0_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$  az összeadás,  $1_{\mathbb{O}} := (1_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$  a szorzás neutrális eleme. Ezen algebrának, mint 8-dimenziós vektortérnek természetes bázisa az  $1_{\mathbb{O}}, (i, 0_{\mathbb{H}}), (j, 0_{\mathbb{H}}), (k, 0_{\mathbb{H}}), E := (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}), (0_{\mathbb{H}}, i), (0_{\mathbb{H}}, j), (0_{\mathbb{H}}, k)$  elemrendszer.

**2. Tétel.** Az  $U := \{(q_0, 0_{\mathbb{H}}): q_0 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  részalgebrát alkot a  $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  algebrában, mivel zárt az  $(1'')$ ,  $(2'')$  és a  $(3'')$  műveletekre nézve. Az  $f_{\mathbb{O}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \rightarrow U, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$  leképezés egy algebra-izomorfizmus, ezért az  $f_{\mathbb{O}}^*: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$  egy beágyazási algebra-monomorfizmus.

A beágyazás eredményeként kapott struktúrát  $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  szimbólummal jelöljük és az *általánosított oktoniók* algebrájának nevezzük. Speciálisan, ha  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , akkor a klasszikus Cayley-féle oktoniók  $\mathbb{O}$  algebráját nyerjük. Az általánosított oktoniók további típusait említi és tárgyalja (ROSENFELD 1997) művében.

**3. Tétel.** Az  $E = (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  elemre teljesülnek a következő összefüggések:

$$(a) \quad E^2 = -\gamma$$

$$(b) \quad \text{bármely } q_1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta} \text{ esetén } (0_{\mathbb{H}}, q_1) = q_1 \cdot E$$

$$(c) \quad \text{minden } (q_0, q_1) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \text{ elem felírható } q_0 + q_1 \cdot E \text{ alakban.}$$

A (c) pontban szereplő előállítást az általánosított oktonió *kvaternió-algebrai* alakjának nevezzük, a vele történő számolás szabályait tartalmazza a következő

**4. Tétel.** Ha  $r \in \mathbb{R}, p_0 + p_1 \cdot E, q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ , akkor

$$(a) \quad \text{skalárral való szorzás: } r \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (r \cdot q_0) + (r \cdot q_1) \cdot E,$$

$$(b) \quad \text{összeadás: } (p_0 + p_1 \cdot E) + (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) \cdot E,$$

$$(c) \quad \text{szorzás: } (p_0 + p_1 \cdot E) \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 \cdot q_0 - \gamma \cdot \overline{q_1} \cdot p_1) + (p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0) \cdot E.$$

A  $p_0 := 0_{\mathbb{H}}, p_1 := 1_{\mathbb{H}}, q_0 := q, q_1 := 0_{\mathbb{H}}$  értékadással a fenti tétel (c) pontja alapján érvényes az

**5. Következmény.** Bármely  $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  esetén teljesül:  $E \cdot q = \bar{q} \cdot E$ .

**Megjegyzés.** Speciálisan ezért igazak az  $E \cdot i = -i \cdot E, E \cdot j = -j \cdot E, E \cdot k = -k \cdot E$  összefüggések.

**6. Tétel.** Ha  $f \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{C}_{\alpha}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ , akkor  $(f \cdot i) \cdot E = f \cdot (i \cdot E)$ .

(a) Ha  $g \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ , akkor  $(g \cdot j) \cdot E = g \cdot (j \cdot E)$ .

(b) Ha  $h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}, E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ , akkor  $(h \cdot k) \cdot E = h \cdot (k \cdot E)$ .

A 3. tétel és a 6. lemma alapján könnyen adódik a

**7. Tétel.** Ha  $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k, q_1 = a_4 + a_5 \cdot i + a_6 \cdot j + a_7 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ , akkor a  $q_0 + q_1 \cdot E$  oktonió felírható az  $a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k + a_4 \cdot E + a_5(i \cdot E) + a_6 \cdot (j \cdot E) + a_7 \cdot (k \cdot E)$  alakban.

Vezessük be a következő egyszerűsítő jelöléseket! Legyen a továbbiakban

$$e_0 := 1, e_1 := i, e_2 := j, e_3 := k, e_4 := E, e_5 := i \cdot E, e_6 := j \cdot E, e_7 := k \cdot E,$$

amely azonos az oktonióknak e fejezet elején az 1. tétel végén említett természetes bázisával. Ekkor a 7. tétel állítása szerint minden oktonió felírható

$$\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$$

formában. Ezt az előállítászt az általánosított oktonió *valós algebrai alakjának*, az ezen előállításban szereplő  $\{e_i\}_{i=0}^7$  elemeket *általánosított oktonióegységeknek* nevezzük.

Az  $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  algebraiban a szorzás disztributív az összeadásra nézve, így a szorzás műveletét egyértelműen meghatározza az általánosított oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblája. A 6. lemma folytatásaként egyszerű direkt számolással igazolható (EBBINGHAUS ET AL. 1991) nyomán a következő

**8. Tétel.** Tetszőleges  $u, v \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$  és  $e_4 = E = (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  esetén érvényesek a következő azonosságok:

(a)  $(u + 0 \cdot e_4) \cdot (v + 0 \cdot e_4) = u \cdot v,$

(b)  $(u + 0 \cdot e_4) \cdot (0 + v \cdot e_4) = u \cdot (v \cdot e_4) = (v \cdot u) \cdot e_4,$

(c)  $(0 + u \cdot e_4) \cdot (v + 0 \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot v = (u \cdot \bar{v}) \cdot e_4,$

(d)  $(0 + u \cdot e_4) \cdot (0 + v \cdot e_4) = (u \cdot e_4) \cdot (v \cdot e_4) = e_4^2 \cdot (\bar{v} \cdot u).$

Megjegyzés: Az (a) rész alapján látható, hogy az olyan oktoniókkal, amelyek „képzetes része” 0, úgy kell számolni, mint a közönséges általánosított kvaterniókkal.

**9. Tétel.** Az általánosított oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblájának belső tartománya:

$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$-\alpha e_0$	$e_3$	$-\alpha e_2$	$e_5$	$-\alpha e_4$	$-e_7$	$\alpha e_6$
$e_2$	$-e_3$	$-\beta e_0$	$\beta e_1$	$e_6$	$e_7$	$-\beta e_4$	$-\beta e_5$
$e_3$	$\alpha e_2$	$-\beta e_1$	$-\alpha \beta e_0$	$e_7$	$-\alpha e_6$	$\beta e_5$	$-\alpha \beta e_4$
$e_4$	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-\gamma e_0$	$\gamma e_1$	$\gamma e_2$	$\gamma e_3$
$e_5$	$\alpha e_4$	$-e_7$	$\alpha e_6$	$-\gamma e_1$	$-\gamma \alpha e_0$	$-\gamma e_3$	$\gamma \alpha e_2$
$e_6$	$e_7$	$\beta e_4$	$-\beta e_5$	$-\gamma e_2$	$\gamma e_3$	$-\gamma \beta e_0$	$-\gamma \beta e_1$
$e_7$	$-\alpha e_6$	$\beta e_5$	$\alpha \beta e_4$	$-\gamma e_3$	$-\gamma \alpha e_2$	$\gamma \beta e_1$	$-\gamma \alpha \beta e_0$

Bizonyítás. A műveleti táblázat bal felső  $4 \times 4$ -es parcellája a 8. tétel (a) része szerint azonos a  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  általánosított kvaterniók egységeinek szorzótáblájával. A műveleti táblázat jobb felső  $4 \times 4$ -es parcellája a 8. tétel (b) részének felhasználásával egyszerű közvetlen számolással igazolható. A műveleti táblázat bal alsó  $4 \times 4$ -es parcellája a 8. tétel (c) része alkalmazásával számolható ki. Végül pedig a műveleti táblázat jobb alsó  $4 \times 4$ -es parcellája a 8. tétel (d) része felhasználásával látható be.  $\square$

A 4. tétel, az oktoniók valós algebrai alakja, a 9. tétel műveleti táblázata felhasználásával érvényesek a következő számolási szabályok az oktoniók között, igaz ugyanis a következő

**10. Tétel.** Ha  $r \in \mathbb{R}$ ,  $o_0 := \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$ ,  $o_1 := \sum_{i=0}^7 b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ , akkor

(a) skalárral való szorzás:  $r \cdot (\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i) = \sum_{i=0}^7 (r \cdot a_i) \cdot e_i$ ,

(b) összeadás:  $o_0 + o_1 = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i + \sum_{i=0}^7 b_i \cdot e_i = \sum_{i=0}^7 (a_i + b_i) \cdot e_i$ ,

(c) szorzás:  $o_0 \cdot o_1 = (\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i) \cdot (\sum_{j=0}^7 b_j \cdot e_j) = \sum_{i,j=0}^7 (a_i \cdot b_j) \cdot (e_i \cdot e_j) =$

$$\begin{aligned}
&= (a_0 b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha \beta a_3 b_3 - \gamma a_4 b_4 - \gamma \alpha a_5 b_5 - \gamma \beta a_6 b_6 - \gamma \alpha \beta a_7 b_7) \cdot e_0 + \\
&+ (a_0 b_1 + a_1 b_0 + \beta a_2 b_3 - \beta a_3 b_2 + \gamma a_4 b_5 - \gamma a_5 b_4 - \gamma \beta a_6 b_7 + \gamma \beta a_7 b_6) \cdot e_1 + \\
&+ (a_0 b_2 - \alpha a_1 b_3 + a_2 b_0 + \alpha a_3 b_1 + \gamma a_4 b_6 + \gamma \alpha a_5 b_7 - \gamma a_6 b_4 - \gamma \alpha a_7 b_5) \cdot e_2 + \\
&+ (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0 + \gamma a_4 b_7 - \gamma a_5 b_6 + \gamma a_6 b_5 - \gamma a_7 b_4) \cdot e_3 + \\
&+ (a_0 b_4 - \alpha a_1 b_5 - \beta a_2 b_6 - \alpha \beta a_3 b_7 + a_4 b_0 + \alpha a_5 b_1 + \beta a_6 b_2 + \alpha \beta a_7 b_3) \cdot e_4 + \\
&+ (a_0 b_5 + a_1 b_4 - \beta a_2 b_7 + \beta a_3 b_6 - a_4 b_1 + a_5 b_0 - \beta a_6 b_3 + \beta a_7 b_2) \cdot e_5 + \\
&+ (a_0 b_6 + \alpha a_1 b_7 + a_2 b_4 - \alpha a_3 b_5 - a_4 b_2 + \alpha a_5 b_3 + a_6 b_0 - \alpha a_7 b_1) \cdot e_6 + \\
&+ (a_0 b_7 - a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 - a_4 b_3 - a_5 b_2 + a_6 b_1 + a_7 b_0) \cdot e_7.
\end{aligned}$$

Ezután megadjuk az általánosított oktoniók  $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  algebrájának egy reprezentációját általánosítva a (KARATAS – HALICI 2018) dolgozatban a Cayley-féle számok  $\mathbb{O}$  algebrája reprezentációs tételét.

A  $\gamma \in \mathbb{R}$  paraméterrel konstruáljuk meg a 2. fejezetben bemutatott módon az általánosított komplex számok  $\mathbb{C}_\gamma$  algebráját! A tetszőleges  $o := \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  általánosított oktonióhoz rendeljük hozzá azt a  $\mathbb{C}_\gamma$  elemeiből felépülő

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

alakú hipermátrixot, ahol

$$\begin{aligned}
A_{11} &:= a_0 + a_4 \cdot i, A_{22} := a_0 - a_4 \cdot i \in \mathbb{C}_\gamma, \\
A_{12} &:= (-a_1 + a_5 \cdot i, -a_2 + a_6 \cdot i, -a_3 + a_7 \cdot i) \in \mathbb{C}_\gamma^3, \\
A_{21} &:= (a_1 + a_5 \cdot i, a_2 + a_6 \cdot i, a_3 + a_7 \cdot i) \in \mathbb{C}_\gamma^3.
\end{aligned}$$

Látható a konstrukció szerint, hogy  $A_{22}$  az  $A_{11}$  konjugáltja,  $A_{21}$  komponensei pedig rendre az  $A_{12}$  megfelelő komponenseinek negatív konjugáltjai.

A  $\mathbb{C}_\gamma$  elemeiből felépülő és e feltételeknek eleget tevő hipermátrixokat *általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok*nak nevezzük és ezek halmazát az  $M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$  szimbólummal jelöljük.

Az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmazában műveleteket értelmezhetünk a következő módon:

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix}, \quad (1''')$$

$$\text{összeadás: } A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}, \quad (2''')$$

$$\begin{aligned}
\text{szorzás: } A * B &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \\
&\begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} - A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix}. \quad (3''')
\end{aligned}$$

Látható, hogy az  $r \in \mathbb{R}$  skalárral való szorzást és az összeadást természetes módon komponensenként értelmeztük, a szorzás emlékeztet némileg a mátrixok klasszikus szorzására, de itt  $\circ$  és  $\times$  a  $\mathbb{C}_\gamma$  rendezett elemhármasaiból képzett  $E_{\alpha\beta}^3(\mathbb{C}_\gamma)$  struktúra (9') és (10') összefüggésekkel analóg  $\mathbb{C}_\gamma$  felett definiált skaláris, illetve vektoriális szorzása.

Nem túl nehéz, de nagy figyelmet igénylő és hosszadalmas számítással belátható, hogy ha  $r \in \mathbb{R}$ ,  $A, B \in M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$ , akkor  $r \cdot A$ ,  $A + B$  és  $A * B \in M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$ , vagyis az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmaza zárt mindhárom műveletre nézve, így  $M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$  algebrai struktúrát alkot e műveletekkel.

Tekintsük most már az

$$\begin{aligned}
&F: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow M^Z(\mathbb{C}_\gamma), \\
&\sum_{j=0}^7 a_j \cdot e_j \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_4 \cdot i & (-a_1 + a_5 \cdot i, -a_2 + a_6 \cdot i, -a_3 + a_7 \cdot i) \\ (a_1 + a_5 \cdot i, a_2 + a_6 \cdot i, a_3 + a_7 \cdot i) & a_0 - a_4 \cdot i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

leképezést! Mivel  $F^{-1}$  is leképezés, így  $F$  maga bijektív. Hosszalmas direkt számítással igazolható, hogy az  $F$  egy művelettartó leképezés is, azaz érvényes az

- (a) homogén:  $F(r \cdot o) = r \cdot F(o)$ ,
- (b) additív:  $F(o_1 + o_2) = F(o_1) + F(o_2)$ ,
- (c) multiplikatív:  $F(o_1 \cdot o_2) = F(o_1) * F(o_2)$ ,

ha  $r \in \mathbb{R}$ ,  $o, o_1, o_2 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  tetszőleges elemek.

Ezért érvényes a dolgozat legfontosabb eredményét összegző következő

**3. Tétel.** A fentiekben definiált  $F: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow M^Z(\mathbb{C}_\gamma)$  leképezés egy izomorfizmus, így az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok algebrája az általánosított oktoniók algebrájának egy reprezentációja.

## 5. Összefoglalás

Az általánosított Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás felhasználásával a valós számok  $\mathbb{R}$  testéből kiindulva megkonstruáljuk az általánosított komplex számok  $\mathbb{C}_\alpha$  kommutatív és asszociatív algebráját. E struktúra újabb megkettőzésével nyerhetjük az általánosított kvaterniók  $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$  nem kommutatív, de asszociatív algebráját. Végül e struktúra ismételt megkettőzésével kaphatjuk meg az általánosított oktoniók  $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját.

Tudjuk, hogy minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra egy alkalmas részalgebrájával, ám az általánosított oktoniók algebrája nem asszociatív, s így nem reprezentálható mátrixokkal. E probléma megoldására dolgozta ki Zorn, M.A. 1933-ban a split oktoniók vektor-mátrix reprezentációját. Eljárását általánosítva a dolgozat fő eredményeként megadhatjuk az  $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$  algebra általánosított vektor-mátrixokkal történő reprezentációját.

## Köszönetnyilvánítás

A szerző hálás és őszinte köszönetét fejezi ki Prof. Dr. Nagy Péter Tibor egyetemi tanárnak támogatásáért és szakmai segítségéért.

## Irodalomjegyzék

- [1] **Albert, A. A.**, Quadratic forms permitting composition. *Annals of Mathematics*, vol. 43, (1942) 161-177.
- [2] **Carley, A.**, On Jacobi's Elliptic Function, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on Quaternions. In: *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, Cambridge University Press, Vol. 1, (1889). 127.
- [3] **Dickson, L. E.**, Linear algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 13(1), (1912) 59-73.
- [4] **Dickson, L. E.**, On Quaternions and Their Generalization and the History of Eight Square Theorem. *Annals of Mathematics*, 2nd. 20(3), (1919) 155-171.
- [5] Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestei, A., Remmert, R., *Numbers*. Springer, 1991. [doi:10.1007/978-1-4612-1005-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1005-4)
- [6] **Hamilton, W. R.**, On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. *Proceeding of the Royal Irish Academy* 2, (1844) 424-434.
- [7] **Hamilton, W. R.**, On Quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy* 3 (1847) 1-16.
- [8] **Jafari, M., Yayli, Y.**, Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1* 64(1), (2015) 15-27. [doi:10.1501/Commua1\\_0000000724](https://doi.org/10.1501/Commua1_0000000724)
- [9] **Karatas, A., Halici, S.**, Vector Matrix Representation of Octonions and Their Geometry. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1* 67(1), (2018) 161-167. [doi:10.1501/Commua1\\_0000000839](https://doi.org/10.1501/Commua1_0000000839)
- [10] **Péntek, K.**, Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. *Dimenziók - Matematikai Közlemények* VI. (2018) 25-30. [doi:10.20312/dim.2018.03](https://doi.org/10.20312/dim.2018.03)
- [11] **Rosenfeld, B.**, *Geometry of Lie groups*. Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1997. [doi:10.1007/978-1-4757-5325-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5325-7)
- [12] **Zorn, M. A.**, Alternativkörper und quadratische Systeme. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. Springer Berlin/Heidelberg, (1933) 395-402.



## Forgólézeres szintezőműszer kalibrálása

Kalmár János, Orbán Aladár, Gribovszki Katalin  
MTA CSFK GGI  
kalmar@ggki.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ:** A forgólézeres szintezőműszer lézerefényének mérésakor mindig vízszintes síkban kell körbeforognia, ettől való eltérése csak korlátok közt (pl.  $\pm 0.5$  mm/m) megengedett. Az irányzási szintezőműszer helyzeti hibáját a horizontferdeség és a kúphiba okozhatja. A korábbi vizsgálatok során nem tudták elkülöníteni a két szöghiba hatását, de geometriai modellezéssel sikerült kimutatnunk, hogy speciális helyzetű skála-pozíciókkal a két szöghiba a skálánál detektált magassági hibák alapján elkülönülten meghatározható.

**ABSTRACT:** During the measurement procedure, the laser beam of the rotary laser level equipment always have to roll over horizontally. The tail swing of the horizontal roll over is limited, and only about  $\pm 0.5$  mm/m allowed. Positional error of the rotary laser level equipment can be caused by horizon-skewness and cone error. Previous studies could not separate the effect of the mentioned angle errors, but our geometric modeling made it possible, that the angle errors can be separately determined by special located foot rules. In order to determine separately the angle errors, it is necessary to use the height errors detected at this special located foot rules.

### 1. Bevezetés

Intézetünk Tárczy-Hornoch Antal mérőcsarnokában geodéziai műszerek kalibrálása folyik, azaz szabatos mérésekkel megállapítják, hogy a vizsgált műszerek pontossága teljesíti-e a gyártó által vállaltakat – ha nem, akkor szükség van a műszer szakszervizben vagy gyártónál történő beszabályozására.

A forgólézeres szintezőműszer (1. ábra) belső szerkezetét sajnos nem ismerjük. Feltételezhető, hogy a műszerben van egy állótengely, melyet a műszer felállítás után egy elmés szerkezet automatikusan függőlegesre állít. A lézer fényforrás az állótengely belsejében van felszerelve. Az állótengely felső végére derékszögű prizmat helyeznek, amely az állótengely körül forgatható, és amely az eredetileg függőlegesen haladó lézer-fényt 90 fokkal megtörve vízszintes irányba tereli. Forgás közben a prizma által kivetített lézerefény vízszintes síkot tűz ki.





1. ábra. Egy nívós Leica forgólézer szintező szet

## 2. A szintezőműszer kalibrálása

Vizsgálatainknál a műszert a 30 m hosszú és 4,6m széles laboratóriumunk közepén állítottuk fel (2. ábra), egy vízszintesre szintezett felületen. A terem 4 falára egy-egy függőlegesre állított, mm osztású léceket (skálát) helyeztünk el, amelyeknek kezdőpontját egyforma magasságúra állítottuk.

A legegyszerűbb vizsgálatoknál csupán azt figyeljük, hogy a kivetített fény egyforma magasságban pásztázza-e a léceket, (az elkerülhetetlen műszerszabályozási hibák miatt ez még sohasem fordult elő), illetve, hogy mekkora a léceken leolvasott értékek egymástól való eltérése. Ez csupán tájékoztató adatokat szolgáltat az adott távolságokon a műszer pontosságáról.

Részletesebb vizsgálatoknál meghatározhatjuk az adott műszermagasságban vízszintesen haladó fény helyes leolvasási értékét is (*Kell* érték) a következő módon:

Tekintsük műszermagasságnak a műszer üveg-falán megjelenő kör-alakú fényfolt középpontját. Ez a további műveletek részére úgy jeleníthető meg, hogy a kilépő fény útját vékony papírlappal zárjuk el. Ezen az ernyőn megjelenő kör-alakú fényfolt középpontja a felsőrendű szintezés szabályai szerint a lécre vetíthető. Az így kapott lécpozíció lesz a műszerből kilépő és vízszintesen haladó fény helyes leolvasási, vagy *Kell* értéke mind a 4 skálán.

A további vizsgálatok alatt a forgó lézer az műszerhibákkal terhelt értékeket vetíti a lécekre. Ezek a *Van* értékek. A *Van* - *Kell* különbség értékei az *s* skála pozíciójától függő  $\delta(s)$  műszerhibák.

Az *r* távolság és a  $\delta$  hiba ismeretében a műszer hibája  $\gamma$  szögértékben is kifejezhető. A hiba ismert  $\gamma$  szöge viszont lehetővé teszi, hogy korrekció céljából a gyakorlati munkáknál bármely *r* léctávolságra kiszámítható legyen a  $\delta$  műszerhiba [1].

Legyen adott  $r$  és  $\delta$  ugyanazon mértékegységben (pl. mm), akkora a szögmásodpercben kifejezett  $\gamma$  szöghiba kis szögekre felírható  $\gamma \approx \rho \cdot \delta / r$  alakban, ahol  $\rho = 180 \cdot 60 \cdot 60 / \pi \approx \approx 206265''$ .

A  $\delta$  hiba adott  $r$  távolságon ezért felírható a  $\delta \approx r \cdot \gamma / \rho$  képlet alapján.

(Ezúton mondunk köszönetet Horváth Attila munkatársunknak Kalibráló Laboratóriumunk kialakításánál nyújtott segítségért, a kalibrálási jegyzőkönyvek és bizonyítványok kiadásánál végzett informatikai munkákért, valamint a mérésekben való részvételéért.)

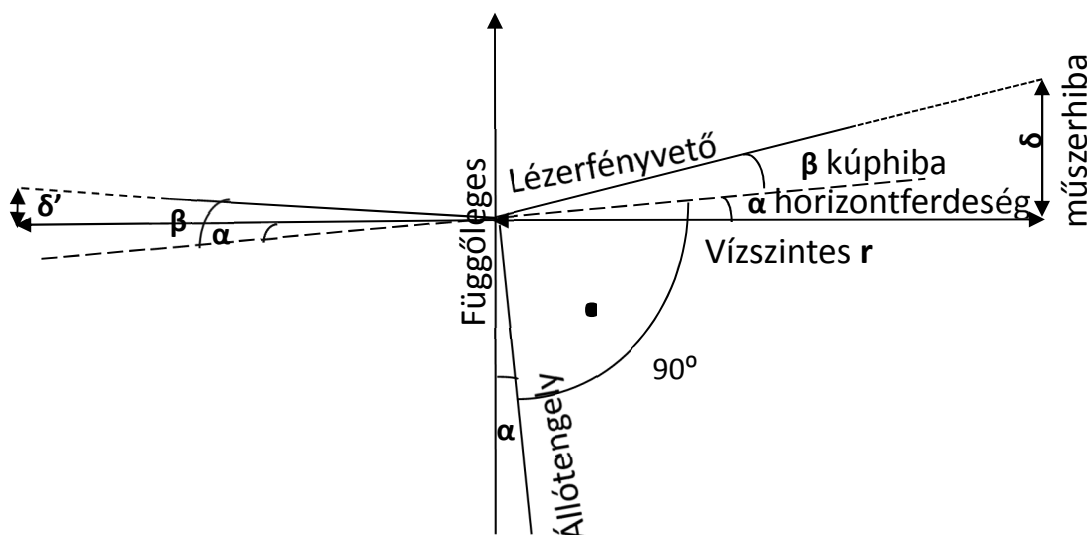
A forgólézeres szintezőműszer főbb szerkezeti és igazítási hibaforrásai a következők:

**Horizontferdeségről** akkor beszélünk, ha az állótengely nem függőleges ( $\alpha$  szöghiba). Ebben az esetben a lézerfény forgás közben nem vízszintes, hanem ferde síkot tűz ki, amely egy adott irányban a vízszint alatt, ellenkező irányban a vízszint felett halad.

**Kúphiba** akkor lép fel, ha a forgó prizma a függőleges fényt nem derékszögben törí meg ( $\beta$  szöghiba). Ekkor a lézervfény állótengely szimmetria-tengelyű tölcésrszerű kúp-palástot pásztáz forgás közben, amely mindig vagy a vízszint felett, vagy az alatt áll.

A kalibráláskor a laboratórium közepén felállított műszerrel körmérést végeztünk a 4 lécen, majd a műszert felemelve a vízszintes lapról 90 fokunként elforgattuk, és megismételtük a körbemérést. A mérési értékeket táblázatba foglaltuk és meghatároztuk a műszerhibák átlagértékét és maximális értékét.

Eddigi méréseink során a két hiba szétválaszthatatlan volt, tehát a laboratóriumban adott  $r$  távolságon kapott  $\delta$  műszerhiba a horizontferdeség és a kúphiba együttes hatását tükrözte.



## 2. ábra. A lézerfényvető tengelyhibái

### 3. A kalibrálási eljárás geometriai modellje

Ha  $r(s)$  jelöli a műszer és az  $s$  skála távolságát, akkor a  $\delta(s)/r(s)$  (mm/m) fajlagos skálahibák meghatározásával hitelesítjük a műszert, és a hiba okát is megnevezhetjük, ha csak egyik típusa fordul elő. A valóságban azonban a horizontferdeségi hiba és a kúphiba egyidejűleg is megjelenhet, egyes skálapozíciókban kiolthatják vagy felerősíthetik egymást, ezért kívánatos lenne hatásuk és nagyságuk elkülönítése és meghatározása még a kalibrálás során, ami a műszer beszabályozását is megkönnyítené.

A 2. ábra jelölései szerint a műszertől a skála  $r$  vízszintes távolságra van, a fényvető és a skála definiálta síkban (2. ábra), az állótengely eltérése a függőlegetől  $\alpha$  (horizontferdeség), a

fényvető eltérése pedig az állótengelyre merőlegetől  $\beta$  (kúphiba), akkor a mért  $\delta$  műszerhiba az alábbi képletekkel számolható ( $\alpha$  és  $\beta$  kicsi szöghibák)

$$\delta = r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \approx r \cdot (\alpha + \beta) \quad (1)$$

Látható, hogy a  $\delta$  műszerhiba akkor is lehet nulla, ha mindkét szöghiba létezik, de ellenkező nagyságú, ezért egyetlen skálapozícióval (méréssel) a műszer nem minősíthető. (1) miatt  $\beta$  felírható az alábbi egyszerű alakban:

$$\beta \approx \delta/r - \alpha \quad (2)$$

Hasonló összefüggések érvényesek az átellenes skálapozícióban:  $r' = r$

$$\delta' = r \cdot \operatorname{tg}(-\alpha + \beta) \approx r \cdot (-\alpha + \beta) \quad (3)$$

$$\beta \approx \delta'/r + \alpha \quad (4)$$

A  $\beta$  kúphiba konstans, ezért (2) = (4) miatt:

$$\alpha = (\delta - \delta')/2/r \quad (5)$$

és (2)-be  $\alpha$ -t (5) alapján visszahelyettesítve kapjuk:

$$\beta \approx \delta/r - \alpha = (\delta + \delta')/2/r \quad (6)$$

A (6) képlet alapján látható, hogy a  $\beta$  kúphiba már két, átellenes skálapozíción mért műszerhibából meghatározható, de  $\alpha$  horizontferdeség (5) nagysága a fényvető irányításától függ, mert az állótengelynek a lézerefény sugara és a fényvető prizmán át húzott függőleges egyenes által kifeszített síkra eső merőleges vetülete fogja definiálni  $\alpha$  pillanatnyi értékét.

Az állótengely horizontferdeségét egyetlen  $\alpha$  szöggel nem tudjuk jellemezni, szükség van a fényvető irányára is, de mindkettő helyettesíthető az állótengely  $\mathbf{a} = (x_t, y_t, 1)$  irányvektorával. Ha az állótengely hibamentes, vagyis függőleges helyzetű, akkor  $x_t = y_t = 0$ .

A skálán a *Kell* pozíció (ahová a lézerefény hibamentes műszer esetén világítana)  $\mathbf{b}$  irányvektora a műszer fényvető origójú koordináta-rendszerében

$$\mathbf{b} = (x_s, y_s, 0) \text{ lesz, és jelölje } r = (x_s^2 + y_s^2)^{1/2}$$

a műszer és a skála (mérőléc) távolságát. Ismert, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_t \cdot x_s + y_t \cdot y_s = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\alpha + 90^\circ) = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\alpha),$$

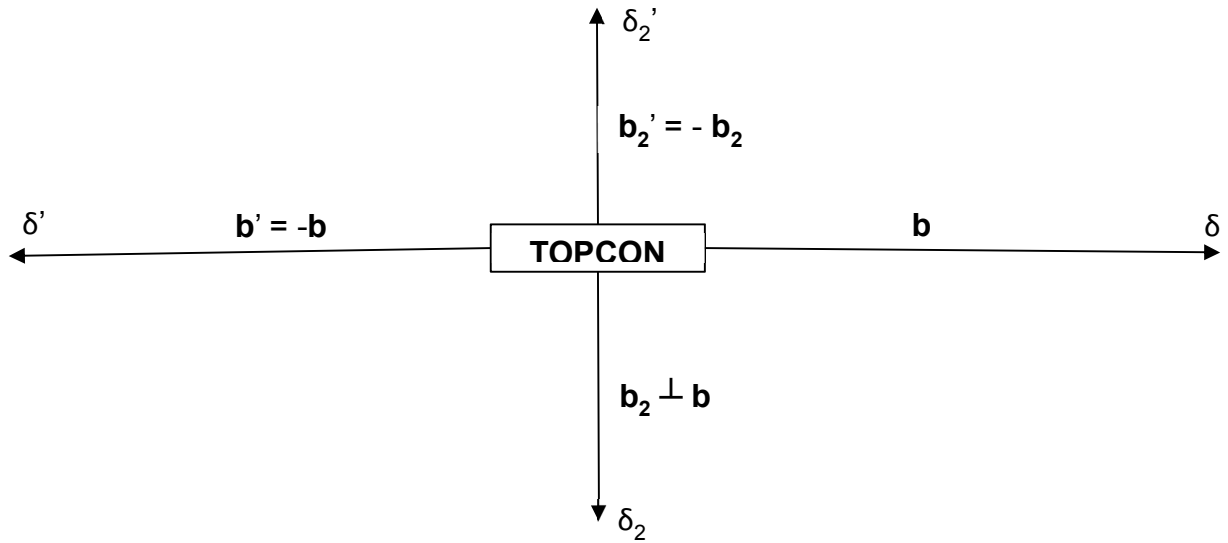
ahol  $|\mathbf{a}| = (x_t^2 + y_t^2 + 1)^{1/2}$ , és  $|\mathbf{b}| = r$ , ezért

$$\sin(\alpha) = -(x_t \cdot x_s + y_t \cdot y_s)/r/|\mathbf{a}| \quad (7)$$

$$\alpha \approx -(x_t \cdot x_s + y_t \cdot y_s)/r/|\mathbf{a}| \quad (8)$$

Az állótengely irányvektorának, vagyis a horizontferdeség meghatározásához további mérésekre van szükség, mert (5) = (8) csak egy egyenletet ad az állótengely keresett  $(x_t, y_t)$  koordinátáira.

Az új magassági mérések az első két mérés tengelyére merőlegesen történjenek (3. ábra).



3. ábra. A műszer kalibrálásának skálapozíciói

A merőleges tengelyen a skálák helyvektorai:

$\mathbf{b}_2 = (y_s, -x_s, 0)$  és  $\mathbf{b}_2' = -\mathbf{b}_2$  lesznek, amivel aktualizáljuk az (5) és (8) képleteket:

$$\alpha_2 = (\delta_2 - \delta_2')/2/r \quad (9)$$

$$\alpha_2 \approx -(x_t \cdot y_s - y_t \cdot x_s)/r/|\mathbf{a}| \quad (10)$$

A állótengely  $\mathbf{a}$  irányvektorának  $(x_t, y_t)$  koordinátáit ezután az (5) = (8) és a (9) = (10) egyenletek megoldásaként kapjuk:

$$-x_t \cdot x_s - y_t \cdot y_s = |\mathbf{a}| \cdot (\delta - \delta')/2 \quad (11)$$

$$-x_t \cdot y_s + y_t \cdot x_s = |\mathbf{a}| \cdot (\delta_2 - \delta_2')/2 \quad (12)$$

A (11) – (12) egyenletek  $|\mathbf{a}|$  jelentése miatt egy két-ismeretlenes másodfokú egyenletrendszerhez vezetnek, aminek létezik ugyan algebrai megoldása, de túl bonyolult.

Egyszerűsítsünk annyit a skálák elrendezésén, hogy az első ( $\delta$  műszerhibájú) műszerállás  $x$  tengelyirányú legyen, ezért  $x_s = r$ , és  $y_s = 0$ , továbbá vezessük be a  $\delta_{12} = \delta' - \delta$ , illetve  $\delta_{34} = \delta_2 - \delta_2'$  jelöléseket;

akkor a (11) – (12) egyenletrendszer a következőképpen néz ki:

$$x_t = |\mathbf{a}|/r/2 \cdot \delta_{12} \quad (13)$$

$$y_t = |\mathbf{a}|/r/2 \cdot \delta_{34} \quad (14)$$

A (13)-(14) egyenletrendszert egyváltozósra vezethetjük vissza, ha az  $(x_t, y_t)$  koordinátákat

$$x_t = q \cdot \delta_{12}, \quad y_t = q \cdot \delta_{34} \quad (15)$$

alakban keressük. Helyettesítsük (15)-öt pl. (13)-ba, akkor kapjuk, hogy

$$q = \pm 1/(4 \cdot r^2 - \delta_{12}^2 - \delta_{34}^2)^{1/2} \quad (16)$$

Mi nem csak az állótengely irányvektorát, hanem annak a függőlegestől való  $\alpha_{\max}$  eltérését is keressük, amit az alábbi képlet szolgáltat:

$$\sin(\alpha_{\max}) = (x_t^2 + y_t^2)^{1/2} / |\mathbf{a}|. \quad (17)$$

$(x_t, y_t)$  (15) – (16) megoldását behelyettesítve és egyszerűsítve kapjuk:

$$\sin(\alpha_{\max}) = (\delta_{12}^2 + \delta_{34}^2)^{1/2} / 2/r. \quad (18)$$

A (18) képletből a szinusz függvényt argumentumával helyettesíthetjük, mert várhatóan kis  $\alpha_{\max}$  hibaszögről van szó.

A fényvető  $\beta$  kúphibájának (6) képlete úgy interpretálható, hogy két átellenes műszerhiba átlagát osztjuk a skálák  $r$  műszer távolságával. Az állótengely irányvektorának meghatározásához viszont négy skála-pozícióra volt szükség, ezért a  $\delta_2, \delta_2'$  átellenes műszerhibák alapján is felírható  $\beta$  egy becslése. Végeredményben a négy skálapozíció miatt a műszer  $\beta$  kúphibájára két becslésünk lesz, ezeket átlagolva a statisztikailag robusztusabb

$$\beta = (\delta + \delta' + \delta_2 + \delta_2') / 4/r \quad (19)$$

kúphiba becsléshez jutunk, azaz vesszük a négy műszerhiba átlagát, és elosztjuk azt a műszer és a skála távolságával. Vegyük észre, hogy a (18)-(19) képletek jól interpretálják a szöghibák alapeseteit:

- A műszernek csak horizontferdeségi hibája van. Az átellenes műszerhibák egyformák, de ellentétes előjelűek:  $\delta + \delta' = 0, \delta_2 + \delta_2' = 0$ , tehát  $\beta = 0$ , vagyis nincs kúphiba.
- A műszernek csak kúphibája van. A műszerhibák egyformák:  $\delta = \delta' = \delta_2 = \delta_2'$ , ezért  $\beta = \delta/r$ , de  $\delta/r = \tan(\beta)$ , ami kis szögeknél jó közelítő értéke  $\beta$ -nak. Ezen megfontolás alapján  $\beta$  (19) becslését tovább élesíthetjük:

$$\tan(\beta) = (\delta + \delta' + \delta_2 + \delta_2') / 4/r \quad (20)$$

#### 4. A szöghibák becslése modellezett műszerhibák alapján

Különböző  $\mathbf{a}$  állótengely irányvektorokat, vagyis  $\alpha_{\max}$  horizontferdeségeket és  $\beta$  kúphibákat modelleztünk. Adott  $\mathbf{b}$  irányvektorú skálapozícióhoz (7) alapján kiszámítottuk az állótengely vetületének  $\alpha$  eltérését a függőlegestől, és az  $r = |\mathbf{b}|$  léctávolság ismeretében (1) alapján kiszámítottuk a  $\delta$  műszerhibákat. Megvizsgáltuk, hogy a (15), (16) képletek milyen pontosan adják vissza az állótengely irányvektorát, illetve a (18), (19) képletek a modellezett szöghibákat. Kiderült, hogy a becslések csak a harmadik értékes jegyben térnek el a modellezett értékektől (1. táblázat).

modellezett kúphiba ( $\beta$ )	a állótengely iránya		horizont-ferdeségi hiba ( $\alpha_{\max}$ )	skálapozíciók		modellezett $\delta$ műszerhiba
	$x_t$	$y_t$		$x_s$	$y_s$	
$3^\circ$	0,06	0,08	$5,7105931^0$	3	0	-0,02213403
becsült kúphiba ( $\beta$ )	a állótengely becsült iránya		horizont-ferdeségi becsült hiba ( $\alpha_{\max}$ )	-3	0	0,33770862
	$x_t$	$y_t$		0	-3	0,39846009
$3,0149449^0$	0,060276	0,080481	$5,7418185^0$	0	3	-0,08200263

1. táblázat. A szöghibák becslése a modellezett műszerhibák alapján

Ezen csekély hiba forrása is megmagyarázható: a képletek levezetésekor a szinusz és tangens szögfüggvényeket argumentumukkal helyettesítettük, ami 0 közelében elfogadott egyszerűsítés. A modellezett szöghibák viszont 3 – 6 fokok voltak, amik már elég távol vannak az origótól ahhoz, hogy becslési hibát okozzanak – a gyakorlatban a megfelelő pontosságú műszerek szöghibái 1 szögperc alatt vannak, vagyis két nagyságrenddel kisebbek.

A levezetett becslő képletek csak a skálák és a műszer  $r$  távolságát illetve a  $\delta$  műszerhibákat tartalmazzák. Megvizsgáltuk, hogyan változnak a számítási eredmények, ha nem standard skálapozícióból (az első mérőléc az  $x$  tengelyhez képest  $\gamma = 70^\circ$  szöggel elforgatott pozícióban van) indulunk ki (2. táblázat).

modellezett kúphiba ( $\beta$ )	a állótengely iránya		horizont-ferdeségi hiba ( $\alpha_{\max}$ )	skálapozíciók		modellezett $\delta$ műszerhiba
	$x_t$	$y_t$		$x_s$	$y_s$	
$3^\circ$	0,06	0,08	$5,7105931^\circ$	1,026	2,819	-0,1290985
becsült kúphiba ( $\beta$ )	a állótengely becsült iránya		horizont-ferdeségi	-1,026	-2,819	0,4464304
	$x_t$	$y_t$	becsült hiba ( $\alpha_{\max}$ )	2,819	-1,026	0,0704527
$3,0149908^\circ$	0,096407	-0,02911	$5,7418185^\circ$	-2,819	1,026	0,2442570

2. táblázat. A szöghibák becslése nem standard skálapozíciók esetén

Kiderült, hogy a szöghibák (18) és (19) becslése invariáns (nem változik) az elforgatásra (előzetesen ezt vártuk), viszont az a állótengely irányvektorának (15) és (16) alapján becsült  $(x_t, y_t)$  koordinátáit az első skálapozícióba forgatott  $x$  tengelyű koordináta-rendszerben kaptuk meg. Mindezekből következően a valódi  $(x_t', y_t')$  koordinátákat úgy számíthatjuk ki, hogy a becsült koordinátákat ugyanolyan forgatásnak vetjük alá, mint amilyen forgatással  $(\cos(\gamma) = x_s / r, \sin(\gamma) = y_s / r)$  az első  $(x_s, y_s)$  műszerállást nyertük a standard  $(r, 0)$  pozícióhoz képest:

$$x_t' = (x_t \cdot x_s - y_t \cdot y_s) / r, \quad y_t' = (x_t \cdot y_s + y_t \cdot x_s) / r \quad (21)$$

## 5. Az eljárás tesztelése műszervizsgálattal

A mérőcsarnokban korábban egy TOPCON forgólézeres szintezőműszer lett kalibrálva, vagyis meg lettek mérve a négy mérőlécen a műszerhibák. A mérés során teljesült az átellenes skálatengelyek merőlegessége, de a vizsgálóhelyiség adottságai miatt a műszertől a skálák eltérő távolságra helyezkedtek el (3. ábra,  $|b_1| = 15$  m,  $|b_2| = 2,3$  m). A mért  $\delta$  műszerhibákat ezért a háromszög hasonlóság alapján 10 méter műszer-skála távolságra normáltuk, és az így korrigált hibák alapján számítottuk ki a kúphibát és a horizontferdeséget (3. táblázat). A műszerhibákból jól látszott, hogy a műszer pontos, mérési hibája nem haladta meg a 0,5 mm/m-t, ezért csak kis szöghibákra számítottunk.

Képleteinket alkalmazva az  $\alpha_{\max}$  szöghibák átlaga 38 szögmásodperc, a  $\beta$  szöghibák átlaga pedig 24 szögmásodperc lett, vagyis a műszernek valóban csak elhanyagolható irányhibája van. Azért beszélhetünk átlagról, mert a műszerrel több mérési sorozatot végeztünk úgy, hogy közben a műszer helyzetét (állótengelyét) változtattuk, azimutját a főirányokba ( $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ) forgattuk. Az átlagolt eredmények hibáját a szórásukkal jellemezhetjük, és az  $\alpha_{\max}$  szöghibák szórása 5 szögmásodperc, a  $\beta$  kúphibák szórása pedig 3 szögmásodperc lett, ami a pontos mérések mellett a számított szöghibák (vagyis (18)-(19) képletek) jó becslésére utal.

Műszer azimut	Skála pozíció	Hiba mm	Korrigált hiba	Skálatáv méter	Sugár m	$\delta_{12} =$ $\delta' - \delta$	$\delta_{34} =$ $\delta_2 - \delta_2'$	$\alpha_{\max}$ radián	$\beta$ radián	$\alpha_{\max}$ fok	$\beta$ fok	$\alpha_{\max}$ sec	$\beta$ sec
0°	$\delta'$	1,5	1,00	15	10	1,667	3,913	0,00021	0,00011	0,0122	0,0061	44	22
	$\delta_2'$	0,0	0,00	2,3									
	$\delta$	-1,0	-0,67	15									
	$\delta_2$	0,9	3,91	2,3									
90°	$\delta'$	0,8	0,53	15	10	1,200	3,043	0,00016	0,00014	0,0094	0,0079	34	28
	$\delta_2'$	0,3	1,30	2,3									
	$\delta$	-1,0	-0,67	15									
	$\delta_2$	1,0	4,35	2,3									
180°	$\delta'$	-0,9	-0,60	15	10	-1,933	-3,478	0,00020	0,00011	0,0114	0,0060	41	22
	$\delta_2'$	0,8	3,48	2,3									
	$\delta$	2,0	1,33	15									
	$\delta_2$	0,0	0,00	2,3									
270°	$\delta'$	-0,9	-0,60	15	10	-1,867	-2,609	0,00016	0,00013	0,0092	0,0072	33	26
	$\delta_2'$	0,8	3,48	2,3									
	$\delta$	1,9	1,27	15									
	$\delta_2$	0,2	0,87	2,3									
Átlag								0,00018	0,00012	0,0105	0,0068	38	24
Szórás								0,00003	0,00002	0,0015	0,0009	5	3

2. táblázat: a TOPCON műszer kalibrálásának eredménye

## 6. Összefoglaló

Geometriai modellezéssel sikerült kimutatnunk, hogy speciális helyzetű mérőléc pozíciókkal a forgólézeres szintezőműszer horizontális ferdesége és kúphibája a léceknél mért magassági hibák alapján elkülönülten meghatározható.

A (11)-(12) két ismeretlenes, másodfokú egyenletrendszer megoldásait feltűnően egyszerű (15)-(16) alakban sikerült felírni, a szöghibák pedig a (18)-(19) képletek alapján számíthatók.

Mind a kísérleti számmodellekben (1. és 2. táblázatok), mind a valós mérések (3. táblázat) alapján sikerült az elméleti eredményeket (képleteket) validálni.

## Irodalomjegyzék

- [1] [Orbán, A. (2000) Minőségügyi kézikönyv. Forgólézeres szintezőműszerek kalibrálása. Belső használatra.



## Kettős Gauss függvény alkalmazása

Csanády Viktória  
SOE Matematikai Intézet  
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Az időbeli folyamatok jellemzése esetén gyakran a folyamat tendenciáját vizsgálva szükségünk lehet bonyolultabb matematikai modellek alkalmazására. A számítógépes statisztikai programok által felkínált alap modellek viszont erre nem adnak kielégítő választ, a felhasználónak kell a speciális modellt megtalálni, majd a gép adta lehetőség révén alkalmazni. Az alábbiakban két speciális kettős Gauss függvény kerül bemutatásra, annak rugalmasságát kiemelve, gyakorlati példákon illusztrálva.

ABSTRACT. To describe tendencies in time series processes we often need to apply complex mathematical models. The basic models offered by statistical computer programmes are usually not applicable, so the user must find the special model, apply it and exploit the computers' potentials. We present two special double-Gaussian functions below, stress their flexibilities through practical examples.

### 1. Bevezetés

Az egyes időfüggő folyamatok jellemzése során, amikor azok, nem mutatnak határozott tendenciát menetükben (monoton növekedés ill. csökkenés), gyakran csak a mérési pontok összekötésére hagyatkoznak ami persze egy meglehetősen primitív megoldás, nem beszélve arról, hogy a főbb matematikai jellemzők ezáltal nem válnak ismerté. Ilyen esetekben, ha mégis modellillesztésre kerül sor, akkor az alkalmasnak tűnő modell általában - amit használnak - egy magasabb fokszámú polinom függvény. Ez a függvény persze számos előírható és elvárható kritériumnak nem tesz eleget, továbbá az illesztésnél szükséges kezdőértékek megadása problémás, olykor sok időt és energiát felemésztő feladat. Az említett kritériumok közül a legkézenfekvőbb a végtelenekben történő viselkedése a polinom függvénynek, ami a vizsgált időbeli folyamatokra egyáltalán nem jellemző, így az alkalmasság megkérdőjelezhető. Az említett folyamatok esetében egyszerűbb a helyzet akkor, amikor lokális szélsőértékkel nem, vagy csak egy ilyen jellemző ponttal bír a leírandó pontsorozat. Ezekben az esetekben általában jól alkalmazhatók az ún. telítési függvények ún. életfüggvények és ezek lineáris kombinációi, bonyolultabb esetekben szuperponált modelljei. Ennek fő indokai a függvények kedvező tulajdonságaiból fakadnak, így a zérushelyből történő indíthatóságból, a függvény korlátosságából illetve aszimptotikus tulajdonságából. Azokban az esetekben viszont, amikor a folyamatot jellemző adatsor több szélsőértékkel bír, inflexiós pontok megléte feltételezhető, akkor az említett modellek már nem alkalmasak a folyamat jellemzésére. Ez az illesztési probléma ösztönözte a gondolatot újabb összetett modellek létrehozására, melyek több szélsőérték esetén is működőképes rugalmas modellek, melyekből igény esetén számíthatók a matematikai jellemzők. Az alábbiakban bemutatásra kerülnek az összetett modellek illetve azok alkalmazása két erdészeti vonatkozásban, a felhasznált adatok a Központi Statisztikai Hivatal adatbázisából származnak.



A vizsgálat tárgya:

- az 1996-2017 éves időszakban évenként kitermelt tölgy, nyár és akác fa mennyiségének időbeli változása. 1. táblázat: Kitermelt faanyag.
- az 1995/1996-2016/2017 időszak évenkénti fásítás-erdőtelepítés mértékének időbeli változása. 2. táblázat: Erdőtelepítés.

A vizsgált adathalmazok és az alkalmazott modellek:

A lehetséges reprodukálhatóság végett megadásra kerülnek a vizsgált adatsorok.

	FAKITERMEELÉS 1000 m <sup>3</sup> /év			
	Év (VAR1)	TÖLGY (VAR2)	NYÁR (VAR3)	AKÁC (VAR4)
1	1996	980	1252	1370
2	1997	1009	1188	1331
3	1998	1033	1207	1266
4	1999	1104	1170	1344
5	2000	1184	1069	1496
6	2001	1158	1090	1425
7	2002	1161	976	1480
8	2003	1133	921	1527
9	2004	1119	933	1462
10	2005	1188	883	1401
11	2006	1157	898	1351
12	2007	1189	875	1206
13	2008	1166	921	1427
14	2009	1052	942	1480
15	2010	1102	980	1628
16	2011	1104	1212	1857
17	2012	1055	1113	1793
18	2013	1039	1115	1745
19	2014	941	1100	1541
20	2015	941	1072	1488
21	2016	938	1071	1429
22	2017	898	1020	1488

1. táblázat. Kitermelt faanyag

	Erdőtelepítés hektár/év			
	TÉNY IDŐSZAK	ÉV (VAR1)	ELSŐ TELEPÍTÉS (VAR2)	ÖSSZ TELEPÍTÉS (VAR3)
1	1995/96	1995	6610	7804
2	1996/97	1996	8289	9742
3	1997/98	1997	8183	9795
4	1998/99	1998	8661	9858
5	1999/00	1999	9790	10842
6	2000/01	2000	13150	15516
7	2001/02	2001	14830	17169
8	2002/03	2002	12015	15028
9	2003/04	2003	7574	11581
10	2004/05	2004	7657	9439
11	2005/06	2005	13989	15008
12	2006/07	2006	18948	20289
13	2007/08	2007	7332	9441
14	2008/09	2008	5168	6303
15	2009/10	2009	5096	5960
16	2010/11	2010	2803	3461
17	2011/12	2011	4537	5009
18	2012/13	2012	2530	3250
19	2013/14	2013	1287	1599
20	2014/15	2014	318	452
21	2015/16	2015	158	300
22	2016/17	2016	626	694

2. táblázat. Erdőtelepítés

Az alkalmazott regressziós modellek:

- Két Gauss függvény kompozíciója (GAUÉGAU)

- matematikai alakja:

$$y = \frac{b_6}{e^{(b_5(x-b_4))^2}} + \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$\text{var2} = b_6 / \exp((b_5 * (\text{var1} - b_4))^2) + b_3 / \exp((b_2 * (\text{var1} - b_1))^2) + b_0.$$

Kezdőérték választás általános (2 maximum vagy minimum) esetben az adatsor értékei alapján:

$b_6 = \text{var2}_{\text{első max.}} - \text{var2}_{\text{min.}}$  vagy  $b_6 = \text{var2}_{\text{első min.}} - \text{var2}_{\text{max.}}$

$b_3 = \text{var2}_{\text{másod. max.}} - \text{var2}_{\text{min.}}$  vagy  $b_3 = \text{var2}_{\text{másod. min.}} - \text{var2}_{\text{max.}}$

$b_4 = \text{var1}_{\text{első max.}}$  vagy  $\text{var1}_{\text{első min.}}$

$b_1 = \text{var1}_{\text{másod. max.}}$  vagy  $\text{var1}_{\text{másod. min.}}$

$b_5 \sim 0,05$   
 $b_2 \sim 0,05$   
 $b_0 = \text{var}2_{\min.}$

- Két abszolútértékes módosított Gauss függvény kompozíciója (ABGAUÉABGAU)

- matematikai alakja:

$$y = \frac{b_8}{e^{(b_7|x-b_6|)^{b_5}}} + \frac{b_4}{e^{(b_3|x-b_2|)^{b_1}}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$\text{var}2 = b_8 / \exp((b_7 * (\text{abs}(\text{var}1 - 1 * b_6)))^{b_5}) + b_4 / \exp((b_3 * (\text{abs}(\text{var}1 - 1 * b_2)))^{b_1}) + b_0.$$

Kezdőérték választás általános (2 maximum vagy minimum) esetben az adatsor értékei alapján:

$b_8 = \text{var}2_{\text{első max.}} - \text{var}2_{\min.}$  vagy  $b_8 = \text{var}2_{\text{első min.}} - \text{var}2_{\max.}$   
 $b_4 = \text{var}2_{\text{másod. max.}} - \text{var}2_{\min.}$  vagy  $b_4 = \text{var}2_{\text{másod. min.}} - \text{var}2_{\max.}$   
 $b_6 = \text{var}1_{\text{első max.}}$  vagy  $\text{var}1_{\text{első min.}}$   
 $b_2 = \text{var}1_{\text{másod. max.}}$  vagy  $\text{var}1_{\text{másod. min.}}$   
 $b_7 \sim 0,1$   
 $b_3 \sim 0,1$   
 $b_5 \sim 3$   
 $b_1 \sim 3$   
 $b_0 = \text{var}2_{\min.}$

A modellek rövid jellemzése:

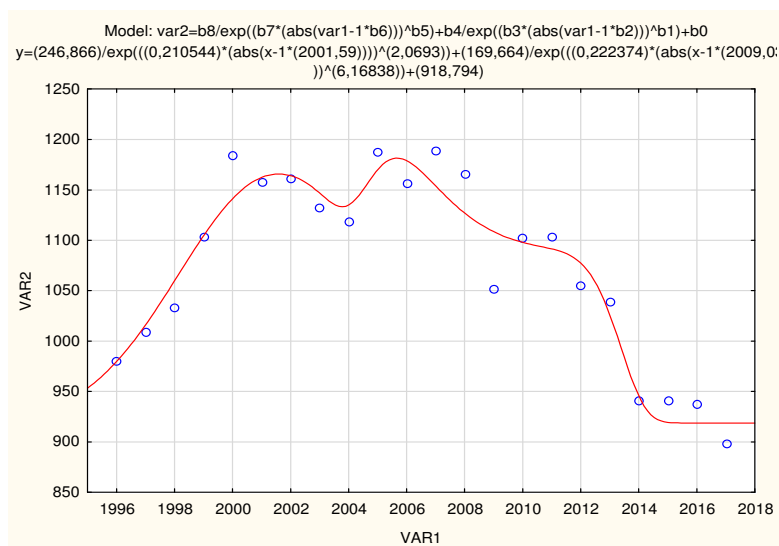
Az alkalmazott GAUÉGAU két transzformált Gauss függvény összegéből áll egy függőleges eltolással, ez adja meg a két szélsőérték létezésének feltételét továbbá a lehetséges asszimetriát. Az ABGAUÉABGAU függvény esetében a kitevő kitevője nem kettő, tetszőleges érték lehet, ami magával vonja az abszolútérték szükségességét. Az említett tetszőleges kitevő kitevője a modell rugalmasságát lényegesen növeli, akár törési pont is előfordulhat a szélsőértékek mellett a modellben.

Első esetben 7, második esetben 9 paraméter befolyásolja a függvény alakját, ezen értékek kezdőértékeinek megadása viszont a már említett módokon könnyűszerrel megadható a pontsorozat ismeretében.

## 2. Számított eredmények, kiértékelés

### 2.1. A fakitermelési adatsorok regressziós eredményei

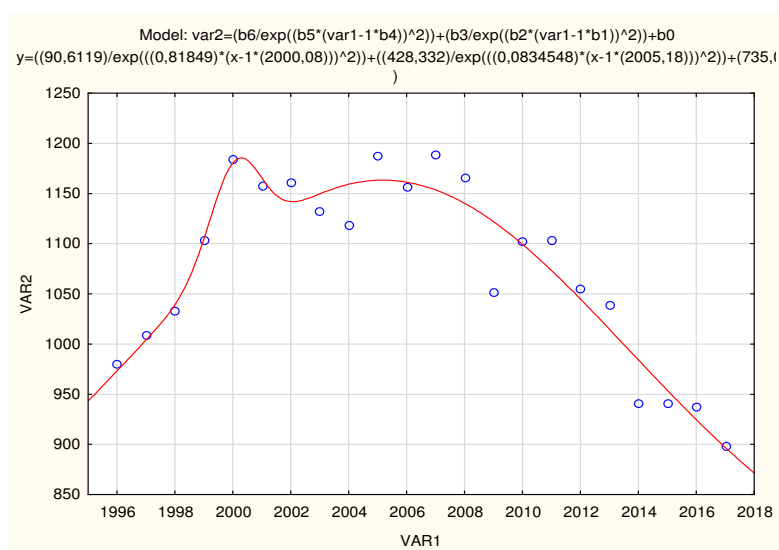
Mind a három fa faj esetén elsőként az ABGAUÉABGAU alkalmazás eredményeit tüntetjük fel majd közvetlen utána a GAUÉGAU eredményeit illetve azok grafikus reprezentációját.



1. ábra. Tölgy ABGAUÉABGAU

N=22	Model: $\text{var2} = b8/\exp((b7 \cdot (\text{abs}(\text{var1} - 1 \cdot b6)))^b5) + b4/\exp((b3 \cdot (\text{abs}(\text{var1} - 1 \cdot b2)))^b1) + b0$ (Tölgy)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 11954,830685 R= ,96584 Variance explained: 93,285%								
Estimate	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	246,8658	0,210544	2001,592	2,069304	169,6643	0,222374	2009,035	6,168376	918,7937

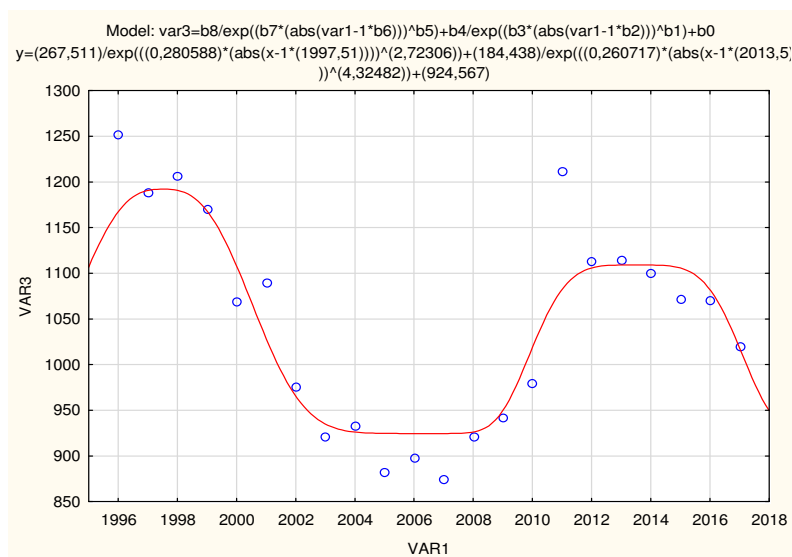
3. táblázat. Tölgy ABGAUÉABGAU



2. ábra. Tölgy GAUÉGAU

N=22	Model: $\text{var2} = (b6/\exp((b5 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b4))^2)) + (b3/\exp((b2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b1))^2)) + b0$ (Tölgy)						
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 13732,520756 R= ,96066 Variance explained: 92,286%						
Estimate	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	90,61190	0,818490	2000,076	428,3321	0,083455	2005,182	735,0434

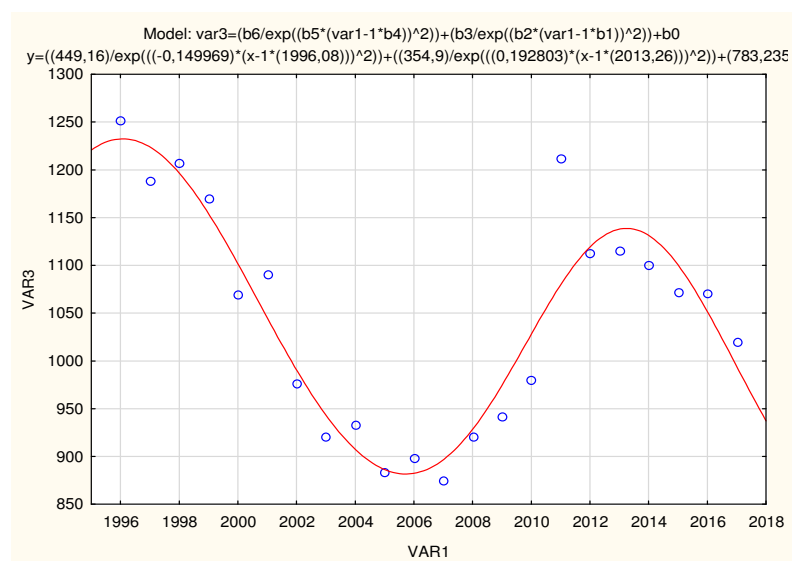
4. táblázat. Tölgy GAUÉGAU



3. ábra. Nyár ABGAUÉABGAU

N=22	Model: $\text{var3} = b8/\exp((b7 \cdot (\text{abs}(\text{var1} - 1 \cdot b6)))^b5) + b4/\exp((b3 \cdot (\text{abs}(\text{var1} - 1 \cdot b2)))^b1) + b0$ Dep. var: VAR3 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 37826,017227 R= ,93247 Variance explained: 86,950%								
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	267,5110	0,280588	1997,508	2,723063	184,4382	0,260717	2013,498	4,324825	924,5673

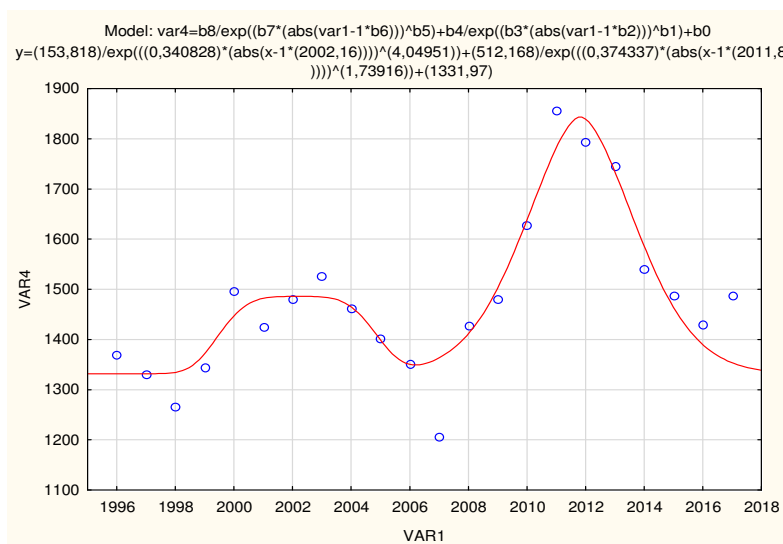
5. táblázat. Nyár ABGAUÉABGAU



4. ábra. Nyár GAUÉGAU

N=22	Model: $\text{var3} = (b6/\exp((b5 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b4))^2)) + (b3/\exp((b2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b1))^2)) + b0$ Dep. var: VAR3 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 31501,971245 R= ,94410 Variance explained: 89,132%						
	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	449,1599	-0,149969	1996,082	354,8996	0,192803	2013,259	783,2354

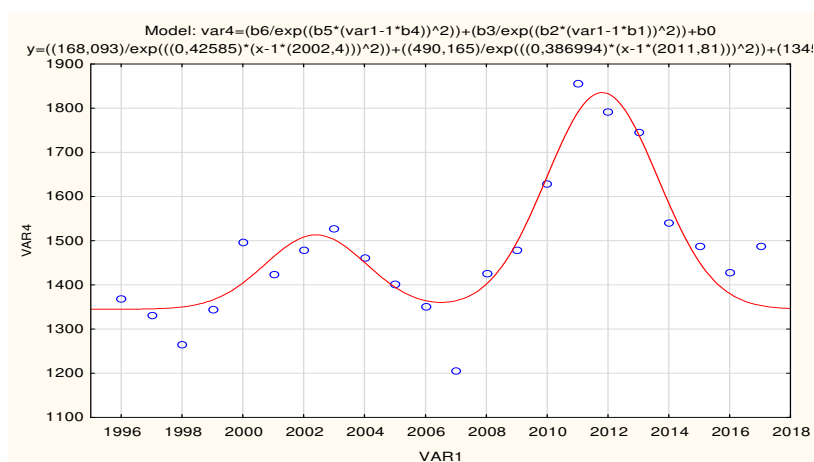
6. táblázat. Nyár GAUÉGAU



5. ábra. Akác ABGAUÉABGAU

N=22	Model: $\text{var4} = b8/\exp((b7 \cdot (\text{abs}(\text{var1} - 1 \cdot b6)))^b5) + b4/\exp((b3 \cdot (\text{abs}(\text{var1} - 1 \cdot b2)))^b1) + b0$ Dep. var: VAR4 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 70028,264512 R= ,93340 Variance explained: 87,123%								
	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	153,8184	0,340828	2002,158	4,049508	512,1679	0,374337	2011,821	1,739160	1331,966

7. táblázat. Akác ABGAUÉABGAU



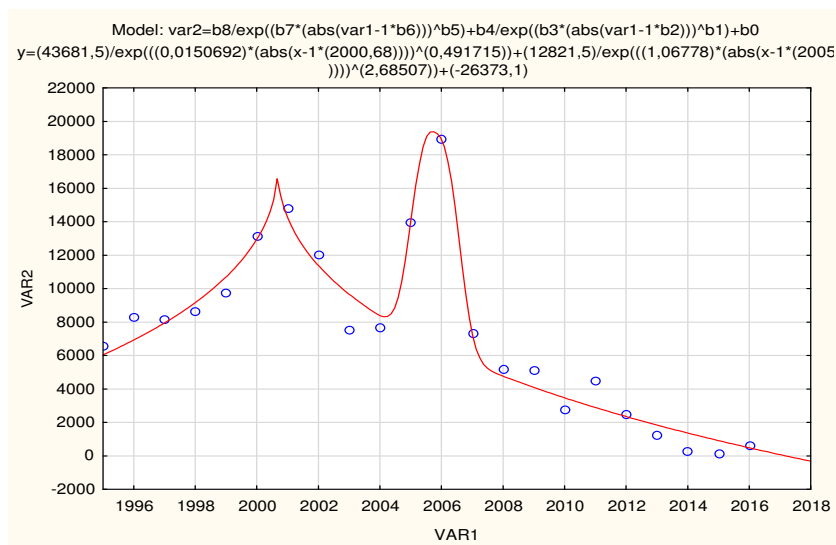
6. ábra. Akác GAUÉGAU

N=22	Model: $\text{var4} = (b6/\exp((b5 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b4))^2)) + (b3/\exp((b2 \cdot (\text{var1} - 1 \cdot b1))^2)) + b0$ Dep. var: VAR4 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 75839,028602 R= ,92766 Variance explained: 86,054%						
	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	168,0929	0,425850	2002,404	490,1647	0,386994	2011,807	1345,100

8. táblázat. Akác GAUÉGAU

## 2.2. Az erdőtelepítési adatsorok regressziós eredményei

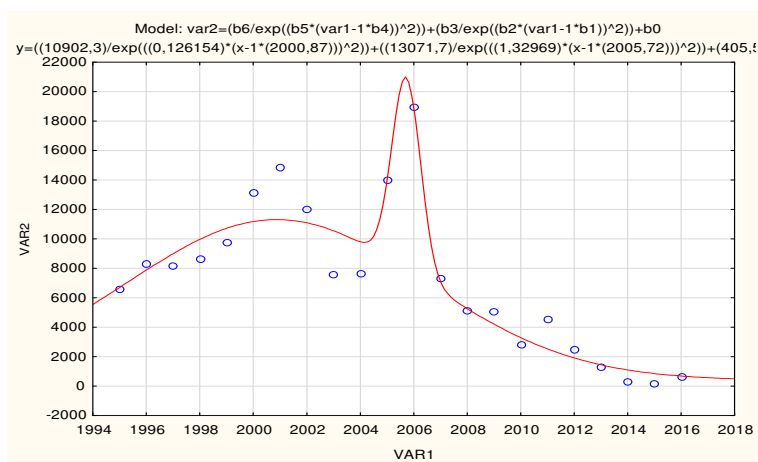
Mind a két erdőtelepítési adatsor esetén az illesztési sorrend változatlan (2.1)



7. ábra. Első telepítés ABGAUÉABGAU

N=22	Model: $\text{var2} = b_8 / \exp((b_7 * (\text{abs}(\text{var1} - 1 * b_6)))^{b_5}) + b_4 / \exp((b_3 * (\text{abs}(\text{var1} - 1 * b_2)))^{b_1}) + b_0$ (Fásítás)								
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 15386487,604 R= ,98577 Variance explained: 97,174%								
Estimate	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	43681,49	0,015069	2000,683	0,491715	12821,50	1,067781	2005,798	2,685068	-26373,1

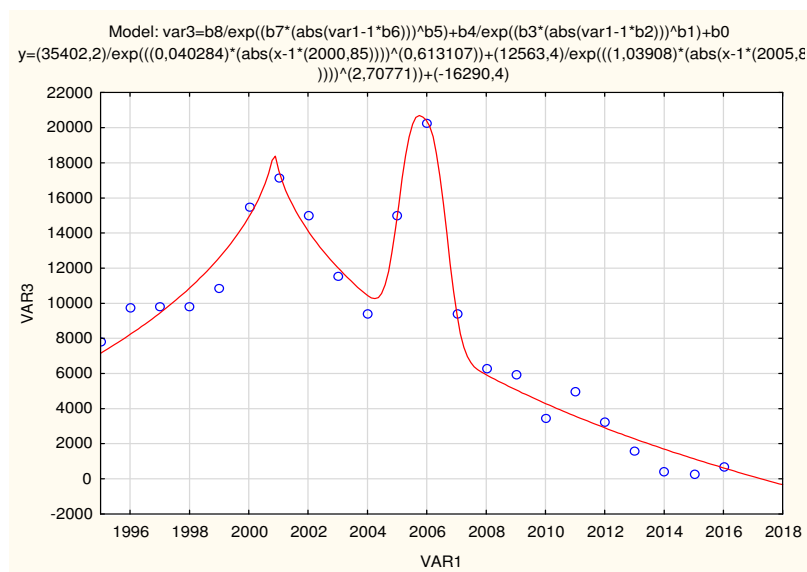
9. táblázat. Első telepítés ABGAUÉABGAU



8. ábra. Első telepítés GAUÉGAU

N=22	Model: $\text{var2} = (b_6 / \exp((b_5 * (\text{var1} - 1 * b_4))^{b_2})) + (b_3 / \exp((b_2 * (\text{var1} - 1 * b_1))^{b_1})) + b_0$ (Fásítás)						
	Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 40639234,125 R= ,96196 Variance explained: 92,536%						
Estimate	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	10902,33	0,126154	2000,868	13071,70	1,329690	2005,723	405,5694

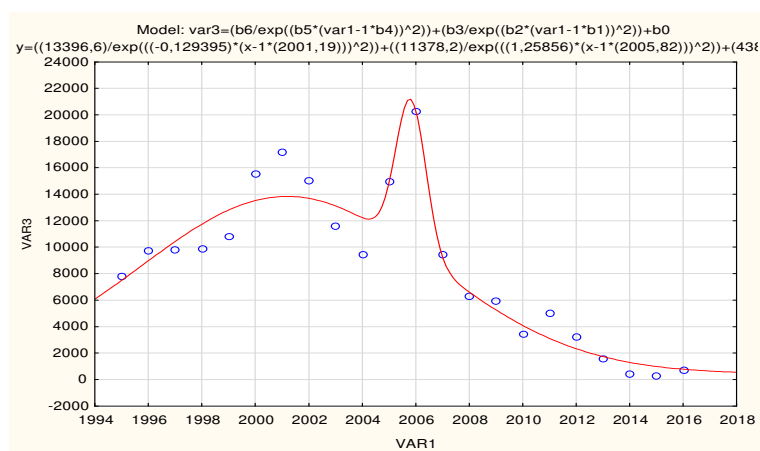
10. táblázat. Első telepítés GAUÉGAU



9. ábra. Összes telepítés ABGAUÉABGAU

N=22	Model: $\text{var3} = b8/\exp((b7*(\text{abs}(\text{var1}-1*b6)))^b5) + b4/\exp((b3*(\text{abs}(\text{var1}-1*b2)))^b1) + b0$ (Fásítás)								
	Dep. var: VAR3 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 16064995,504 R= ,98825 Variance explained: 97,663%								
Estimate	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	35402,21	0,040284	2000,848	0,613107	12563,43	1,039083	2005,872	2,707708	-16290,4

11. táblázat. Összes telepítés ABGAUÉABGAU



10. ábra. Összes telepítés GAUÉGAU

N=22	Model: $\text{var3} = (b6/\exp((b5*(\text{var1}-1*b4))^2)) + (b3/\exp((b2*(\text{var1}-1*b1))^2)) + b0$ (Fásítás)						
	Dep. var: VAR3 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 42254557,076 R= ,96878 Variance explained: 93,854%						
Estimate	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
	13396,60	-0,129395	2001,191	11378,23	1,258563	2005,819	438,3610

12. táblázat. Összes telepítés GAUÉGAU



### 2.3. Elemzés, értékelés

#### *A fakitermelési adatok regressziós vizsgálatának elemzése fafajonként:*

##### *- Tölgy*

A kapott R értékek alapján az ABGAUÉABGAU pontosabb illesztést eredményez, amit jól igazolnak az illesztési ábrák. Bár a szélsőértékek száma a két modell esetén megegyező, a pontsor követése az első esetben sokkal szorosabb.

##### *- Nyár*

A kapott R értékek alapján itt a GAUÉGAU mutat század nagyságrendben nagyobb értéket. Az ábrák vizsgálatából az tűnik ki, hogy az említett modell határozottabb lefutású a szélsőértékekre nézve, ennek oka a pontsorozat jellegéből adódik.

##### *- Akác*

A R értéke ennél a fafajnál az ABGAUÉABGAU esetében nagyobb. Bár hasonló jelleget mutat a két modell grafikonja a jobb illesztés észlelhető. A kettős Gauss esetében az egyes szélsőértékekhez tartozó hullámokat szimmetria jelzi míg a módosított kitevő esetén az asszimetria is fellelhető, ami indokolja a már említett nagyobb R értéket.

Mind a három fafaj esetében az egyes illesztések eredményeiből meghatározhatók a növekvő, csökkenő időszakok intervallumai mind a független mind a függő változóra, meghatározhatók a szélsőérték helyek és értékek. Az ábra alapján közelítőleg a modell alapján pontosan megadhatók az inflexiós helyek és értékek, melyek a változási sebesség meghatározó pontjai, valamint megadják a modell konvex illetve konkáv intervallum határait.

#### *Értékelés:*

A felsoroltak igazolják, hogy az alkalmazott modellek hasonló jellegű adatsorok vizsgálatára alkalmasak, könnyen használhatók és részletes tájékoztatók.

#### *Az erdőtelepítési adatok regressziós vizsgálatának elemzése telepítési típusonként:*

##### *- Első telepítés*

Az adatsor értékeinek jelentős ingadozását itt az ABGAUÉABGAU modell követi kellő pontossággal, amit a  $R=0,9857$  érték is fémjelez, míg ugyan magas R értéket jelez a GAUÉGAU modell  $R=0,9619$  a pontsorozat követése ennél azonban lényegesen pontatlanabb.

##### *- Összes telepítés*

Az adatsor hasonló jellegű az első telepítés adatsorához. Az eredmény itt is azt mutatja, hogy az ABGAUÉABGAU modell rugalmasan követi a pontsorozatot, amit alátámaszt az R érték, ami itt eléri a 0,9882-t. A kettős Gauss követési pontossága lényegesen gyengébb még az  $R=0,9687$  magas értéke ellenére is.

#### *Értékelés:*

A fenti adatsorok igazolják a két modell közötti jelentős rugalmassági tulajdonsági eltérést. Bizonyos esetekben lehet elegendő a kettős Gauss alkalmazása is, ha eltekintünk az adatsor erős szóródásától, viszont ekkor a folyamat leírása pontatlanná válik. Ezzel szemben a módosított kitevő révén kapott modell kellő pontossággal írja le a folyamatot

### 3. Összefoglaló

A gyakorlati életből, az erdészet területéről választott adatsorok nem hasonlíthatók egy klasszikus fizikai, kémiai mérési sorozathoz, ahol a tendencia várható, a mért értékek szélsőséges ingadozása nem jellemző. Az itt vizsgált adathalmazok változékonyak, több maximum vagy minimum értékkel bírhatnak, növekedési vagy csökkenési sebesség változása mellett. Jellemzésükre nem alkalmasak a hagyományos egyszerű modellek. A bemutatott két modell, a kettős Gauss GAUÉGAU valamint a kitevőkben módosított ABGAUÉABGAU rendelkezik azzal a rugalmassággal melyre az illesztésnél szükség lehet.

Az eredmények igazolják, hogy különösen az utóbbi függvény alkalmas ehhez hasonló szélsőséges adatsorok jellemzésére megfelelő pontossággal. A függvény jól mutatja az adathalmaz szakaszainak menetét, szélsőértékeit, konvexitását, inflexiós pontjait, ugyanekkor magas korrelációs értéke jelzi az illesztés pontosságát. Mindez indokolja a függvény alkalmazását szélsőséges adatsorok esetén.

### Irodalomjegyzék

- [1] Csanády V., Horváth-Szováti E., Szalay L., Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), 175p.
- [2] Központi Statisztikai Hivatal. <https://www.ksh.hu/stadat> .



## Elsőrendű differenciálegyenletes modellek

**Horváth-Szováti Erika**

Soproni Egyetem Matematikai Intézet  
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** Sok tudományterületen fordulnak elő olyan problémák, amelyek megoldásához differenciálegyenletek használata szükséges. Ennek szemléltetése nem egyszerű, mivel hallgatóink csupán egy-két differenciálegyenlet-típusról tanulnak, csak a legfontosabb integrálási módszereket ismerik, és legtöbbször a differenciálegyenletek felírásához nélkülözhetetlen fizikai, kémiai, stb. ismeretekkel sem rendelkeznek. Az itt összegyűjtött egyszerű modellek rávilágítanak a differenciálegyenletek alkalmazásának módjára és szükségességére.

**ABSTRACT.** These simple practical models highlights the practical application of differential equations. To solve these math problems, students need only a little background knowledge. By these exercises students can see that differential equations are essential in different sciences.

### 1. Bevezetés

A természettudományokban, gazdaságtudományokban, és még sok más területen gyakran fordulnak elő olyan problémák, amelyekkel kapcsolatban a változás és annak üteme kerül a vizsgálat középpontjába, azaz differenciálegyenlettel oldhatók meg. Napjainkban az agrár-műszaki felsőoktatásban, illetve a műszaki felsőoktatás nem klasszikus (pl. faipari mérnök, mechatronikai mérnök, stb.) szakjain BSc képzésben legtöbb intézményben a matematika óraszámok csökkenése tapasztalható. Emiatt egyre kevesebb idő jut a differenciálszámítás, integrálszámítás és differenciálegyenletek témakörére. Az integrálási módszerek közül csak a fontosabbakat tanítjuk, és a differenciálegyenletek témakörét is csak érintőlegesen, csupán egy-két típus erejéig tárgyaljuk. Az itt bemutatásra kerülő viszonylag egyszerű feladatok differenciálegyenlettel történő megoldása hallgatóink matematikai ismereteivel is lehetséges. A szükséges fizikai, kémiai, és egyéb ismereteket a feladatok szövegében röviden összefoglaltuk. A folyamatot leíró differenciálegyenlet a példában adott, csupán annak értelmezése és megoldása, valamint az esetleges további kérdések megválaszolása a feladat. Az itt összegyűjtött modellek segítségével rávilágíthatunk a differenciálegyenletek alkalmazására, használatuk szükségességére. A feladatokban szereplő ismeretlen függvények különböző jelölései (pl.:  $v(t)$ ,  $p(z)$ ,  $T(t)$ , stb.) segíthetik a hallgatókat abban, hogy ne csak a szokásos  $y(x)$  alakban legyenek képesek a differenciálegyenleteket megoldani, hanem a tudás elsajátításának egy magasabb szintjére lépjenek.

## 2. Elsőrendű, szétválasztható változójú differenciálegyenlettel megoldható feladatok

1. Egy  $30 \frac{m}{s}$  kezdősebességgel magára hagyott motorcsónak sebessége az indulástól számított 30 másodperc időpillanatban  $15 \frac{m}{s}$ . Jelöljük  $v(t)$ -vel a motorcsónak sebesség-idő függvényét. A test sebessége minden időpillanatban a pillanatnyi sebesség négyzetével arányosan csökken:  $-v'(t) = k \cdot v^2(t)$ , ahol  $k(\in \mathbb{R})$  arányossági tényező, neve közegellenállási együttható. Mekkora lesz a csónak sebessége az indulástól számított 60 másodperc múlva?

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenletből indulunk ki, amely szétválasztható változójú:

$$-\frac{v'(t)}{v^2(t)} = k,$$

$$\int -\frac{v'(t)}{v^2(t)} dt = \int k dt,$$

$$\frac{1}{v(t)} = kt + C,$$

$$v(t) = \frac{1}{kt+C}, \quad k, C \in \mathbb{R}.$$

A kapott függvényben lévő két szabadon választható paraméter ( $k$  és  $C$ ) értékét a kezdeti feltételekkel határozzuk meg. Adott volt, hogy a test sebessége a  $t = 0$  s időpillanatban  $30 \frac{m}{s}$ , és  $t = 30$  s időpillanatban pedig  $15 \frac{m}{s}$ :

$$\begin{aligned} v(0) &= 30, \\ v(30) &= 15. \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve az általános megoldásba az

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k \cdot 0 + C} &= 30 \\ \frac{1}{k \cdot 30 + C} &= 15 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszeret kapjuk. Az első egyenletből  $C = \frac{1}{30}$ , ezt beírva a másodikba  $k = \frac{1}{900}$  adódik. Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$v(t) = \frac{900}{t+30},$$

amelyből kiszámoljuk a csónak sebességét az indulástól számított 60 másodperc elteltével:

$$v(60) = \frac{900}{90} = 10 \left( \frac{m}{s} \right).$$

2. Egy  $v_0 = 100 \frac{m}{s}$  kezdősebességgel függőlegesen felfelé kilőtt rakéta sebesség-idő függvényét jelöljük  $v(t)$ -vel. A sebesség csökkenését minden időpillanatban a rakétára lefelé ható gravitációs gyorsulás ( $g \approx 10 \frac{m}{s^2}$ ), illetve a közegellenállás okozza, ez utóbbi a rakéta pillanatnyi sebességének négyzetével egyenesen arányos, azaz:  $-v'(t) = g + k \cdot v^2(t)$ , ahol a  $k (\in \mathbb{R})$  arányossági tényező neve közegellenállási együttható. (Feltesszük, hogy a rakéta mozgását akadályozó légellenállás állandó.) A pálya legmagasabb pontján a rakéta sebessége  $0 \frac{m}{s}$ . Határozzuk meg a  $v(t)$  függvényt és azt a  $T$  időpillanatot, amikor a rakéta eléri pályájának lemagasabb pontját!

Megoldás.

A differenciálegyenlet változóit szétválasztjuk és az integrálást elvégezzük:

$$\frac{v'(t)}{1 + \frac{k}{10}v^2(t)} = -10,$$

$$\int \frac{v'(t)}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{10}}v(t)\right)^2} dt = -\int 10 dt,$$

$$\arctg\left(\sqrt{\frac{k}{10}}v(t)\right) = \sqrt{\frac{k}{10}}(-10t + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

A  $\sqrt{\frac{k}{10}} \cdot C = C_2$  ( $C_2 \in \mathbb{R}$ ) új konstans bevezetve

$$\arctg\left(\sqrt{\frac{k}{10}}v(t)\right) = -\sqrt{10k} \cdot t + C_2,$$

ebből a következő sebesség-idő függvényt kapjuk:

$$v(t) = \sqrt{\frac{10}{k}} \cdot \operatorname{tg}(C_2 - \sqrt{10k} \cdot t), \quad k, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Adott a feladatban, hogy a rakéta sebessége a  $t = 0$  másodperc időpillanatban  $100 \frac{m}{s}$ , illetve a keresett  $T$  időpillanatban a sebessége  $0 \frac{m}{s}$ . Ezeket visszaírjuk az általános megoldásba:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{10}{k}} \cdot \operatorname{tg}(C_2 - \sqrt{10k} \cdot 0) &= 100 \\ \sqrt{\frac{10}{k}} \cdot \operatorname{tg}(C_2 - \sqrt{10k} \cdot T) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletből:  $C_2 = \arctg(\sqrt{1000k})$ , a másodikból:  $T = \frac{C_2}{\sqrt{10k}}$ . Behelyettesítve  $C_2$ -t a  $T$  kifejezésébe:

$$T = \frac{\arctg(\sqrt{1000k})}{\sqrt{10k}},$$

ahol  $k \in \mathbb{R}$  a közegellenállási együttható.

3. Minden vízcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog el. Egy közelítőleg gömb alakú vízcsepp átmérője kezdetben 3 mm, 20 másodperc múlva pedig 1 mm. Jelöljük  $d(t)$ -vel a vízcsepp átmérőjét az idő függvényében. Az átmérő csökkenésének sebessége tehát arányos a gömb felszínével, emiatt az átmérő négyzetével is, azaz:  $-d'(t) = A \cdot d^2(t)$ , ahol  $A \in \mathbb{R}$  arányossági tényező. Mekkora lesz a vízcsepp átmérője 50 másodperc elteltével?

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenletből indulunk ki, amely szétválasztható változójú. Megoldásának menete hasonló az előző feladatban leírtakhoz, így nem részletezzük:

$$\begin{aligned} -\frac{d'(t)}{d^2(t)} &= A, \\ &\vdots \\ d(t) &= \frac{1}{At+C}, \quad A, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Az  $A$  és  $C$  konstansok értékeit a kezdeti feltételekből meghatározzuk. A vízcsepp átmérője a  $t = 0$  s időpillanatban 3 mm,  $t = 20$  s esetén pedig 1 mm, azaz:  $d(0) = 3$ ,  $d(20) = 1$ . Ezeket visszaírva az általános megoldásba egy egyenletrendszert kapunk, melynek megoldása  $A = \frac{1}{30}$  és  $C = \frac{1}{3}$ . A kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás tehát:

$$d(t) = \frac{1}{\frac{1}{30}t + \frac{1}{3}} = \frac{30}{t+10}.$$

Ebből kiszámoljuk a vízcsepp átmérőjét 50 másodperc múlva:

$$d(50) = \frac{30}{60} = 0,5 \text{ (mm)}.$$

4. Egy radioaktív anyag bomlását vizsgáljuk. A bomlási folyamat kezdetekor 100 db radioaktív atom volt, az anyag felezési ideje 1 perc. Hány darab sugárzó atom lesz a bomlási folyamat kezdetétől számított másfél perc múlva? Jelöljük  $N(t)$ -vel a sugárzó (még nem el nem bomlott) atomok számát. Radioaktív bomlás során a radioaktív atomok számának csökkenési sebessége minden időpillanatban arányos a még el nem bomlott atomok számával:  $N'(t) = -A \cdot N(t)$ , ahol  $A \in \mathbb{R}$  arányossági tényező.

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenlet szétválasztható változójú:

$$\begin{aligned} \int \frac{N'(t)}{N(t)} dt &= \int -A dt, \\ \ln|N(t)| &= -At + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ |N(t)| &= e^{-At+C}, \\ N(t) &= \pm e^C e^{-At}. \end{aligned}$$

A  $\pm e^C = C_2$  ( $C_2 \in \mathbb{R}$ ) új konstans bevezetve a következő megoldás adódik:

$$N(t) = C_2 e^{-At}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása két szabadon választható paramétert ( $A$  és  $C_2$ ) tartalmaz. Ezek értékeit a feladat szövegében lévő kezdeti feltételek segítségével határozzuk meg:

$$N(0) = 100,$$

illetve a vizsgált anyag felezési ideje 1 perc, azaz 60 másodperc:

$$N(60) = 50.$$

A kezdeti feltételeket behelyettesítve az általános megoldásba a

$$\begin{cases} C_2 e^{-A \cdot 0} = 100 \\ C_2 e^{-A \cdot 60} = 50 \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből  $C_2 = 100$ , ezt visszaírva a másodikba, és kifejezve a másik konstans:

$$A = \frac{\ln 2}{60}.$$

Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás

$$N(t) = 100 e^{-\frac{\ln 2}{60} t}.$$

Ebből kiszámítjuk a radioaktív atommagok számát a bomlási folyamat kezdetétől számított másfél perc, azaz 90 másodperc múlva:

$$N(90) = 100 e^{-\frac{\ln 2}{60} \cdot 90} \approx 35 \text{ (db)}.$$

5. A légnyomás a magasság növekedésével csökken. Jelöljük  $p(z)$ -vel a légnyomás-magasság függvényt. Nagy magasságkülönbségek esetén a légnyomás magasságtól való függését a  $p'(z) = -Ap(z)$  differenciálegyenlet írja le (ahol  $A \in \mathbb{R}$ ), azonos hőmérsékletű légoszlopot feltételezve. (A Föld légkörének hőmérséklete kb. 11 km magasságig kilométerenként kb.  $6,5^\circ\text{C}$ -kal csökken, így a hőmérsékletet tekinthetjük állandónak.) Tudjuk, hogy a légnyomás tengerszinten átlagosan 1013 hPa, illetve tengerszint felett 300 méteres magasságban átlagosan 977 hPa. Határozzuk meg a légnyomás értékét a tengerszint felett 1000 méteres magasságban!

Megoldás.

A feladatban adott szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldásának menete hasonló az előző feladatban leírtakhoz, így nem részletezzük:

$$\begin{aligned} \int \frac{p'(z)}{p(z)} dz &= \int -A dz, \\ &\vdots \\ p(z) &= C e^{-Az}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



A differenciálegyenlet megoldásául kapott  $p(z)$  függvény neve barometrikus magasságformula. A kezdeti feltételek szerint  $p(0) = 1013$ , és  $p(300) = 977$ , ezeket behelyettesítve az általános megoldásba az

$$\begin{cases} Ce^{-A \cdot 0} = 1013 \\ Ce^{-A \cdot 300} = 977 \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből  $C = 1013$ , ezt visszaírva a másodikba és a másik konstans kifejezve:

$$A = -\frac{1}{300} \ln \frac{977}{1013}.$$

Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$p(z) = 1013 e^{\frac{z}{300} \ln \frac{977}{1013}}.$$

Ennek segítségével kiszámítjuk az 1000 méter magasságban lévő légnyomás értékét:

$$p(1000) = 1013 e^{\frac{1000}{300} \ln \frac{977}{1013}} \approx 886,37 \text{ (hPa)}.$$

Megjegyzés:

A légnyomás értékének becslésekor a Föld felszínének közelében 100 méterenként közelítőleg 1,2 kPa légnyomás csökkenéssel szoktak számolni. Esetünkben ez a becslés  $p(1000) = 1013 - 120 = 893$  (hPa) eredményt adott volna.

**6. Egy henger alakú tartályban 1,44 m magasságig víz áll. A tartály alján egy kör alakú lefolyónyílás van dugóval bezárva. Kihúzzuk a dugót. Jelöljük  $h(t)$ -vel a tartályban lévő vízoszlop magasság-idő függvényét. A vízoszlop magassága minden időpillanatban a pillanatnyi magasság négyzetgyökével arányosan csökken, azaz:  $-h'(t) = A \cdot \sqrt{h(t)}$ , ahol  $A \in \mathbb{R}$  arányossági tényező. A dugó kihúzásától számított 1 perc múlva a víz magassága 1 m. Mennyi idő alatt ürül ki a tartály?**

Megoldás.

A differenciálegyenlet változóit szétválasztjuk, az integrálást elvégezzük és az egyenletet  $h(t)$ -re rendezzük:

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -A,$$

$$\int \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} dt = \int -A dt,$$

$$2\sqrt{h(t)} = -At + C_1, \quad A, C_1 \in \mathbb{R},$$

$$h(t) = \left(-\frac{A}{2}t + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(C_1 - At)^2.$$

A kezdeti feltételek szerint  $h(0) = 1,44$ , és  $h(1) = 1$  (az időt percben mérjük, a magasságot méterben). A megoldás utolsó, explicit alakjában szereplő négyzetre emelés a konstansok meghatározását kicsit bonyolítja. (Az első kezdeti feltételt ebbe visszaírva  $C_1 = \pm 2,4$ , a két  $C_1$  érték mindegyikéhez  $A$ -ra szintén két-két eredményt kapunk. Természetesen később kiderül,

hogyan melyek azok a konstans értékek, amelyek nem tesznek eleget a követelményeknek.) Ehelyett egyszerűbben meg tudjuk határozni a konstansokat a levezetés utolsó előtti sorából, vagyis a differenciálegyenlet általános megoldásának implicit alakjából:

$$\left. \begin{aligned} 2\sqrt{1,44} &= -A \cdot 0 + C_1 \\ 2\sqrt{1} &= -A \cdot 1 + C_1 \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletből  $C_1 = 2,4$ , ezt visszaírva a másodikba az  $A = 0,4$  eredmény adódik. A konstansokat behelyettesítve az általános megoldás explicit alakjába a következő partikuláris megoldást kapjuk:

$$h_p(t) = \frac{1}{4}(2,4 - 0,4t)^2 = (1,2 - 0,2t)^2.$$

Ebből meg tudjuk határozni, hogy mennyi idő alatt ürül ki a tartály:

$$0 = (1,2 - 0,2t)^2,$$

$$t = 6 \text{ (perc)}.$$

7. Lekvárfőzéskor egy üveg lekvár hőmérséklete  $20^\circ\text{C}$ -os környezetben 10 perc alatt hűl le  $100^\circ\text{C}$ -ról  $80^\circ\text{C}$ -ra. Határozzuk meg a test hőmérsékletét a vizsgálat kezdetétől számított 30 perc múlva. Mikor lesz a test hőmérséklete  $40^\circ\text{C}$ -os? Jelöljük  $T(t)$ -vel a lekvár hőmérséklet-idő függvényét. A Newton-féle hűlési törvény szerint egy test hőmérsékletének változása egyenesen arányos a test és a környezet hőmérsékletének különbségével, azaz:  $T'(t) = -\lambda(T(t) - T_k)$ , ahol  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  arányossági tényező a test anyagára és alakjára jellemző pozitív állandó,  $T_k$  pedig a környezet hőmérséklete.

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenletből indulunk ki, amely szétválasztható változójú:

$$\frac{T'(t)}{T(t) - T_k} = -\lambda,$$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t) - T_k} dt = \int -\lambda dt,$$

$$\ln|T(t) - T_k| = -\lambda t + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$|T(t) - T_k| = e^{-\lambda t + C},$$

$$T(t) - T_k = \pm e^{-\lambda t} e^C.$$

A  $\pm e^C = C_2$  ( $C_2 \in \mathbb{R}$ ) konstans bevezetve:

$$T(t) = C_2 e^{-\lambda t} + T_k, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Az egyenletbe behelyettesítjük a  $T_k = 20$  értéket, vagyis a környezet feladatban adott hőmérsékletét. A függvényben lévő két szabadon választható paraméter ( $\lambda$  és  $C_2$ ) értékét a feladat által megadott kezdeti feltételek ( $T(0) = 100$ ,  $T(10) = 80$ ) általános megoldásba történő behelyettesítésével kapjuk meg:

$$\left. \begin{aligned} 100 &= C_2 e^{-\lambda \cdot 0} + 20 \\ 80 &= C_2 e^{-\lambda \cdot 10} + 20 \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenletről  $C_2 = 80$ , ezt visszaírva a másodikba:

$$\lambda = -\frac{1}{10} \ln \frac{3}{4}.$$

A kezdeti feltételeknek megfelelő konstansok értékeit behelyettesítjük az általános megoldásba, így megkapjuk a partikuláris megoldást, amely megadja a lekvár hőmérsékletét az idő függvényében:

$$T(t) = 80e^{\frac{t}{10} \ln \frac{3}{4}} + 20.$$

Ebből kiszámítjuk, hogy hány fokok lesz a lekvár hőmérséklete 30 perc múlva:

$$T(30) = 80e^{\frac{30}{10} \ln \frac{3}{4}} + 20 = 53,75^\circ,$$

illetve azt is, hogy mikor lesz a lekvár hőmérséklete  $40^\circ\text{C}$ -os:

$$80e^{\frac{t}{10} \ln \frac{3}{4}} + 20 = 40,$$

$$e^{\frac{t}{10} \ln \frac{3}{4}} = \frac{1}{4},$$

$$t = 10 \cdot \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln \frac{3}{4}} \approx 48,19 \text{ (perc)}.$$

Megjegyzés:

A  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$  határértéket vizsgálva látható, hogy a lekvár idővel felveszi a környezet hőmérsékletét, azaz a függvény eleget tesz annak, amit a fizikai ismereteink alapján várunk:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( 80e^{\frac{t}{10} \ln \frac{3}{4}} + 20 \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (80e^{-0,0288 \cdot t} + 20) = 20.$$

8. Egy csésze kávéba 10 g cukrot teszünk. Fél perc múlva már csak 1 g fel nem oldott cukor van benne. Mennyi lesz a még fel nem oldódott cukor mennyisége 1 perc múlva? Mikor oldódik fel a cukor 99,9%-a? És az összes cukor? Jelöljük  $m(t)$ -vel a még fel nem oldódott cukor tömegét az idő függvényében, továbbá legyen  $m_k$  a kávéba tett cukor tömege. Az oldódás sebessége arányos a még fel nem oldódott cukor mennyiségével:  $m'(t) = A(m_k - m(t))$ , ahol  $A \in \mathbb{R}$  arányossági tényező.

Megoldás.

A feladatban adott differenciálegyenletről indulunk ki, amely az előbbihez hasonló szétválasztható változójú differenciálegyenlet. A megoldás lépéseit nem részletezzük:

$$\frac{m'(t)}{m_k - m(t)} = A$$

$$\vdots$$

$$m_k - m(t) = \pm e^{-At} e^{-C}, \text{ ahol } A, C \in \mathbb{R}.$$

$A \pm e^{-C} = C_2$  (ahol  $C_2 \in \mathbb{R}$ ), illetve a  $-A = A_2$  ( $A_2 \in \mathbb{R}$ ) konstansokat bevezetve:

$$m(t) = m_k - C_2 e^{A_2 t}, \quad A_2, C_2 \in \mathbb{R}.$$

A kapott függvényben lévő két szabadon választható paraméter ( $A_2$  és  $C_2$ ) értékét a kezdeti feltételekkel határozzuk meg. Ezek  $m(0) = 0$ , hiszen a  $t = 0$  időpillanatban még nincs feloldódott cukor, illetve  $m(30) = 9$ , mert fél perc múlva már 9 g cukor feloldódott. Behelyettesítjük az egyenletbe az  $m_k = 10$  értéket is, azaz az

$$\left. \begin{aligned} 10 - C_2 e^{A_2 \cdot 0} &= 0 \\ 10 - C_2 e^{A_2 \cdot 30} &= 9 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer kapjuk. Az első egyenletből  $C_2 = 10$ , ezt visszaírva a másodikba

$$A_2 = \frac{1}{30} \ln \frac{1}{10}$$

adódik. Tehát a kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás:

$$m(t) = 10 - 10 e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} = 10 \left( 1 - e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} \right).$$

Ebből kiszámoljuk a 1 perc elteltével feloldódott cukor mennyiségét:

$$m(60) = 10 \left( 1 - e^{\frac{60}{30} \ln \frac{1}{10}} \right) \approx 9,9 \text{ (g)}.$$

A feladatban azt is kérdeztük, hogy mikor oldódik fel a cukor 99,9%-a. Ezt a

$$10 \left( 1 - e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} \right) = 10 \cdot 0,999$$

egyenlet megoldásával tudjuk meghatározni.

$$e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} = 0,001,$$

$$t = 30 \frac{\ln 0,001}{\ln \frac{1}{10}} = 90 \text{ (s)}.$$

Tehát 1,5 perc múlva oldódik fel a cukor 99,9%-a. És az összes cukor mikor oldódik fel? A

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 10 \left( 1 - e^{\frac{t}{30} \ln \frac{1}{10}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} 10(1 - e^{-0,0767t}) = 10$$

határértéket vizsgálva is látható, hogy végtelen sok idő szükséges ahhoz, hogy az összes cukor feloldódjon. Akármennyi (véges) ideig várunk, mindig lesz egy kevés még fel nem oldódott cukor, azonban a mennyisége rövid idő alatt az érzékelhetőség határa alá csökken.

### 3. Összefoglalás

Hallgatóink számára a felsőbb matematikai ismeretek elsajátítása sok esetben nehézségekkel jár. A differenciálegyenletek témaköréből különösen nehéz megtalálnunk azokat a feladatokat és azt a tárgyalásmódot, amely számukra érthető. Bízunk abban, hogy az előzőekben felsorolt differenciálegyenletes modellekkel sikerül elérnünk a célunkat:

- a gyakorlati alkalmazás kiemelésével a problémakör lényegét és jelentőségét még jobban megvilágítjuk,
- a szétválasztható változójú differenciálegyenletek témakörében fellelhető típusok széles körére találhatók példák közöttük,
- a differenciálegyenletekkel kapcsolatos fogalmakat még jobban elmélyítjük (pl. a megoldás explicit és implicit alakja, általános megoldás, partikuláris megoldás),
- a fizikai, kémiai ismeretek hiánya nem akadályozza a hallgatókat a probléma megoldásában (a differenciálegyenleteket és a szükséges háttérismereteket a feladatok megadják),
- a függvényhatárérték egy-két gyakorlati alkalmazása ezt a témakört is közelebb hozza a hallgatókhoz.

Meggyőződésünk, hogy a matematika tanulása által hallgatóink olyan kompetenciákra tesznek szert, amelyek a munkahelyek világában és a tudományos élet más területein is gondolkodóvá, precízebbé, kreatívabbá, sikeresebbé teszi őket. Hiszen „a matematika hozzászoktatja a szemünket ahhoz, hogy tisztán és világosan lássa az igazságot” (René Descartes).

### Irodalomjegyzék

- [1] **Budó Ágoston:** Kísérleti fizika I-III., Tankönyvkiadó Budapest, 1978.
- [2] **Geda Gábor:** Modellezés és szimuláció az oktatásban,. Educatio Kht., 2011.  
[https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038\\_informatika\\_Geda\\_Gabor-Modellezes\\_es\\_szimulacio\\_az\\_oktatasban/ch04s05.html](https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_informatika_Geda_Gabor-Modellezes_es_szimulacio_az_oktatasban/ch04s05.html)
- [3] **Hatvani László – Pintér Lajos:** Differenciálegyenletes modellek a középiskolában. Polygon, Szeged, 1997.
- [4] **Kurics Tamás:** Differenciálegyenletek. ELTE Jegyzet, 2011.  
[http://web.cs.elte.hu/~kuricst/bboard/notes/foldtuddiff\\_ea.pdf](http://web.cs.elte.hu/~kuricst/bboard/notes/foldtuddiff_ea.pdf)
- [5] **Ponomarjov, K.K.:** Differenciálegyenletek felállítása és megoldása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
- [6] **Scharnitzky Viktor:** Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
- [7] **Szaszkó-Bogár Viktor:** Közönséges differenciálegyenletek  
<http://www.staff.u-szeged.hu/~vszaszko/ODE%2020130902.pdf>
- [8] **Terjéki József:** Differenciálegyenletek. Polygon, Szeged, 1997.

## PMSB és alkalmazása

**Bán István**

erdőmérnök és alkalmazott matematikus  
istvan.ban.dr@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. A PMSB (Planned Method Selection by Bán) alapját a természetben megfigyelt állapotjellemzők értékeire vonatkozó axiómák adják. Az állapotjellemzők értékeinek halmazában a PMSB előre megtervezett módon azonossági részhalmazokat képez és ezekből a részhalmazokból választja ki egy adott érdek érvényesítésének legkedvezőbb lehetőségét. A PMSB a hétköznapi gyakorlatban széleskörűen használható.

### 1. Bevezetés

Az igen soktényezős és gyakran nem metrizálható tényezőket is tartalmazó bonyolult, de nem ismert hatásmechanizmusokkal rendelkező halmazokban egy adott szempont szerinti optimum keresés céljából dolgoztam ki a PMSB módszert.

### 2. PMSB

A természetben a PMSB matematikai modellezéshez az alábbi axiómákat figyeltem meg:

1. A természet az állapotjellemzőinek értékeivel írható le.
2. Az üres halmaz kitágítható (kiterjeszthető) valós elemeket is tartalmazó halmazokká, amelyeket valós halmazoknak nevezünk.
3. Valós halmazokban az állapotjellemzők értékei állandóan változnak. Megjegyzés: A konstans állapotjellemzőt zero értékváltozású állapotjellemzőnek tekintjük.
4. Az állapotjellemzők hatnak egymásra.
5. Adott állapotjellemzők átalakulhatnak más állapotjellemzőkké.

Az előző axiómák teszik lehetővé az állapotjellemzők értékei által definiált halmazoknak a vizsgálatát, különös tekintettel azok szerkezetére, tulajdonságaira és hatásmechanizmusára. Ezekben a halmazokban definiáljuk a kívánatos állapotjellemző értéket, amelyből származtatjuk az optimum fogalmát. Mindezek ismeretében nyílt lehetőség a PMSB matematikai modelljének megalkotására. Általánosan megfogalmazva és leegyszerűsítve a PMSB egy igen soktényezős bonyolult rendszerben egy adott érdek vagy elvárás kielégítése érdekében keresi meg a legkedvezőbb teljesíthetőséget, mint megoldást. A modell azonossági részhalmazok előre megtervezett módszer szerinti kiválasztásával keresi meg egy adott érdek érvényesítésének legkedvezőbb lehetőségét, mint megoldást. A módszer neve is ebből ered: Planned Method Selection by Bán kezdetű PMSB.

### 3. Gyakorlati alkalmazás

A PMSB gyakorlati felhasználásának megkönnyítése érdekében a matematikai modell szöveges számítástechnikai modelljét is elkészítettem.

Az alkalmazást nagymértékben elősegíti a számítástechnika rohamos fejlődése, elsősorban a gépek műveleti sebességének- és tárkapacitásának rohamos növekedésével valamint az adatbáziskezelő szoftverek ugrásszerű javulásával.

A PMSB gyakorlati felhasználása a mesterséges intelligenciában igen sokrétű, úgy mint az agrár-, gyógyászati, ipari- és az asztronautikai gyakorlatban. Jelentősebb alkalmazások a következők:

- a legjobb gyógyító terápia meghatározásának számítógépes modellje
- az ebola terápia számítógépes modellje
- génstruktúra analízis
- közgazdasági optimális stratégia meghatározása
- agrokémiai talajerőutánpótlás és technológiai szaktanácsadás.
- erdészeti fajtamegválasztás
- erdőállomány-fatömegbecslés
- GPS működési jelazonosítás
- elektronikus adatrögzítés és olvasás
- univerzum képződmények keletkezése
- stb.

A PMSB részletes leírását és alkalmazását az alábbi két könyv tartalmazza: [1], [2].

### 4. Összefoglalás

Az állapotjellemzők értékeinek halmazában a PMSB előre megtervezett módon azonossági részhalmazokat képez és ezekből a részhalmazokból választja ki egy adott érdek érvényesítésének legkedvezőbb lehetőségét. A PMSB alkalmazható a gyógyászati-, mezőgazdasági-, erdészeti-, ipari és asztronautikai gyakorlatban.

### Irodalomjegyzék

- [1] **István Bán**, Mathematics, Language of the Universe. Rózsadomb Contact Kft. Budapest, 2018. p.132
- [2] **István Bán**, PMSB in Artificial Intelligence. Rózsadomb Contact Kft. Budapest, 2019, p.175